Lösningar till utvalda uppgifter i kapitel 2

2.6 Vi beräknar determinanten av matrisen med de tre vektorerna som kolumner. Absolutbeloppet av denna ger volymen av parallellepipeden som de spänner upp. Vi får att

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} &= 2(-6 \cdot -3 - 2 \cdot 2) \\ &\quad + 3(2 \cdot 6 - 3 \cdot -3) + 6(3 \cdot 2 - (-6) \cdot 6) \\ &= 28 + 63 + 252 = 343.\end{aligned}$$

Alternativt kunde man observerat att de är ortogonala och i själva verket 7 gånger en ON-bas, så vi har en kub med sidan 7. Detta ger ju också att volymen är $7^3 = 343$.

2.10

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1+2 \\ 2 & 4 & 2+4 \\ 3 & 6 & 3+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$$

Det andra steget utnyttjar regel 4 och det tredje utnyttjar reglerna 3 och 5.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1+3 \\ 2 & 7 & 2+7 \\ 0 & 3 & 0+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 7 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$$

Det andra steget utnyttjar regel 4 och det tredje utnyttjar reglerna 3 och 5.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -5 & 7 \end{vmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 6 & -3 & 3 \\ 12 & -5 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 4+1 \\ 6 & -3 & 6-3 \\ 12 & -5 & 12-5 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 6 & -3 & 6 \\ 12 & -5 & 12 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \\ 12 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

Det första steget utnyttjar regel 2, det tredje steget utnyttjar regel 4 och det fjärde utnyttjar reglerna 3 och 5.

2.12 Genom att subtrahera andra kolumnen ifrån den tredje och sedan den första kolumnen ifrån den andra får vi:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 \\ (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 \\ (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2x+3 \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2x+5 \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2x+7 \end{vmatrix}.$$

Subtrahera sedan åter andra kolumnen ifrån den tredje:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2x+3 \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2x+5 \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2x+7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2 \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Subtrahera nu andra raden ifrån den tredje och därefter den första raden ifrån den andra:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2 \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ 2x+1 & 2 & 0 \\ 2x+3 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Subtrahera nu till slut återigen den andra raden ifrån den tredje och vi får en diagonal matris som vi lätt räknar ut:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ 2x+1 & 2 & 0 \\ 2x+3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ 2x+1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8.$$

Alternativt kan man förstås använda Sarrus regel och förenkla de sjättegradspolynom man får.

2.14 (a) Eftersom determinanten är skild ifrån 0 så existerar inversen och om

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

så är

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

och alltså har även A^{-1} heltalselement och eftersom

$$\det(A)^{-1} = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{1} = 1$$

så ligger A^{-1} i M.

(b) Om

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} och B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

så är

$$AB = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}.$$

Det ger att

$$f_{AB}(x) = \frac{(ae+bg)x + (af+bh)}{(ce+dg)x + (cf+dh)}.$$

Å andra sidan så ges sammansättningen av

$$
\begin{aligned}
f_A \circ f_B(x) &= f_A\left(\frac{ex+f}{gx+h}\right) \\
&= \frac{a\left(\frac{ex+f}{gx+h}\right)+b}{c\left(\frac{ex+f}{gx+h}\right)+d} \\
&= \frac{a(ex+f)+b(gx+h)}{c(ex+f)+d(gx+h)} \\
&= \frac{(ae+bg)x+(af+bh)}{(ce+dg)x+(cf+dh)}.
\end{aligned}
$$

Vi ser därmed att de två funktionerna stämmer överens.

2.15 (a) En direkt kalkyl ger med A som i frågan att

$$A^2 - sp(A)A + det(A)I =$$

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a^2+bc-a^2-ad+ad-bc & b(a+d)-(a+d)b \\ c(a+d)-(a+d)c & d^2+bc-ad-d^2+ad-bc \end{pmatrix} = 0.$$

(b) Vi vet från första deluppgiften att om $det(A) = 0$ så gäller att $A^2 = sp(A)A$. Rekursivt får vi nu att

$$A^3 = A^2 \cdot A = sp(A)A \cdot A = sp(A)A^2 = sp(A)^2 A,$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = sp(A)^2 A \cdot A = sp(A)^2 A^2 = sp(A)^3 A$$

etc. Det känns som om $A^n = sp(A)^{n-1}A$ är en inte alltför vild gissning. Vi verifierar med ett enkelt induktionsbevis.

Basfall för $n = 1, 2, 3$ och 4 är klara.

Antag att påståendet sant för något k och visa att i så fall är det sant också för $k+1$.

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = sp(A)^{k-1} A \cdot A = sp(A)^{k-1} sp(A) A = sp(A)^k A$$

och därmed är saken klar.

Vi har alltså visat påståendet som efterfrågades med

$$k_n = sp(A)^{n-1}.$$