Lösningar till utvalda uppgifter i kapitel 3

3.6 En normaliserad riktningsvektor för linjen ges av $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\left(\begin{smallmatrix}1\\k\end{smallmatrix}\right)$. Om $\mathbf{v}_L$ är ortogonala projektionen av en vektor $\mathbf{v}$ på linjen så ges speglingen av $\mathbf{v}$ av $\mathbf{v}_S = 2\mathbf{v}_L - \mathbf{v}$. Dessutom gäller att $\mathbf{v}_L = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathbf{n}$ så vi får att om $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ så är

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_S &= 2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathbf{n} - \mathbf{v} = \frac{2}{1+k^2}\left[\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{2}{1+k^2}(x+yk) - x\\ \frac{2k}{1+k^2}(x+yk) - y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{1+k^2} - 1 & \frac{2k}{1+k^2}\\ \frac{2k}{1+k^2} & \frac{2k^2}{1+k^2} - 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Matrisen för avbildningen är alltså

$$\frac{1}{1+k^2}\begin{pmatrix}1-k^2 & 2k\\ 2k & k^2-1\end{pmatrix}.$$

3.9 Om R är matrisen för rotationen och S är matrisen för speglingen så är den sökta matrisen $M = SR$. Vi har att rotationen ges av

$$R = \begin{pmatrix}\cos\pi/3 & -\sin\pi/3\\ \sin\pi/3 & \cos\pi/3\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}.$$

Speglingen avbildar $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ på $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ och vice versa så

$$S = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Det ger att den sökta matrisen är

$$M = SR = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1\\ 1 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

3.10 Spegling i linjen $y = x$ avbildar $\mathbf{e}_x$ på $\mathbf{e}_y$ och vice versa, så den har matrisen

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Projektion på x-axeln lämnar $\mathbf{e}_x$ totalt oberörd och krossar $\mathbf{e}_y$ totalt så den har matrisen

$$B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Den sökta matrisen är alltså

$$C = BA = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

3.11 Om P är matrisen för projektionen och R är matrisen för rotationen så är den sökta matrisen $A = RP$.

För projektionen är $\mathbf{e}_x$ och $\mathbf{e}_y$ oförändrade och $\mathbf{e}_z$ avbildas på nollvektorn så

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

För rotationen är $\mathbf{e}_x$ oförändrad, $\mathbf{e}_y$ avbildas på $\mathbf{e}_z$ och $\mathbf{e}_z$ avbildas på $-\mathbf{e}_y$ så

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Därmed är den sökta matrisen

$$A = RP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.14 (a) Vektorn $\mathbf{u} = \binom{1}{3}$ är en riktningsvektor för linjen som vi kallar L. En godtycklig vektor $\mathbf{v} = \binom{x}{y}$ projiceras på

$$\mathbf{v}_L = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\,\mathbf{u}\,|^2} \cdot \mathbf{u} = \frac{x+3y}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} x+3y \\ 3x+9y \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Matrisen för avbildningen är alltså

$$A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

(b) Linjen $y = 3x + 1$ går inte igenom origo och därmed är projektionen på linjen inte en linjär avbildning. Däremot är den en affin avbildning som man lämpligen delar upp i tre delavbildningar. Först flyttas origo upp ett steg i y-led (för alla punkter betyder detta att y-koordinaten minskas med ett). Projektionen på linjen $y = 3x+1$ svarar nu mot den linjära avbildningen från första deluppgiften och har alltså matrisen A. Till slut flyttas origo tillbaka till dess ursprungliga plats. Sätt

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och låt den linjära avbildningen från första deluppgiften vara $h(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Det som vi just beskrev blir då

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= g \circ h \circ g^{-1}(\mathbf{x}) = g\left(A\left(\mathbf{x} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\right) \\ &= A\left(\mathbf{x} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = A\mathbf{x} - \frac{1}{10}\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = A\mathbf{x} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Svaret är alltså samma A som i första deluppgiften och $\mathbf{b} = \frac{1}{10}\left(\begin{smallmatrix}-3\\1\end{smallmatrix}\right)$.

3.17 Den allmänna formeln för funktionen är

$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix},$$

så

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x_1+x_2\\-(y_1+y_2)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}x_1\\-y_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_2\\-y_2\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

och

$$f\left(c\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}cx\\cy\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}cx\\-(cy)\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix} = c \cdot f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$$

och alltså är f linjär.

3.18 Vi har t ex att

$$f\left(2 \cdot \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} \neq 2 \cdot \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = 2 \cdot f\left(\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right)$$

så f är inte linjär.

3.24 Vi har att $\mathbf{e}_y$ är oförändrad och att xz-planet roterar i positiv led. Det ger att

$$A = \begin{pmatrix}\cos\pi/4 & 0 & -\sin\pi/4\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\pi/4 & 0 & \cos\pi/4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

Spegling i yz-planet påverkar inte $\mathbf{e}_y$ och $\mathbf{e}_z$ medan $\mathbf{e}_x$ avbildas på $-\mathbf{e}_x$. Det ger att

$$B = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Den sökta matrisen är

$$C = BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

3.25 Om P är matrisen för projektionen och R är matrisen för rotationen så är den sökta matrisen $A = PR$.

För projektionen är $\mathbf{e}_x$ och $\mathbf{e}_y$ oförändrade och $\mathbf{e}_z$ avbildas på nollvektorn så

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

För rotationen är $\mathbf{e}_x$ oförändrad, $\mathbf{e}_y$ avbildas på $\mathbf{e}_z$ och $\mathbf{e}_z$ avbildas på $-\mathbf{e}_y$ så

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Därmed är den sökta matrisen

$$A = PR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.26 Vi skapar sammansättningen av avbildningen som avbildar $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ på standardbasen följt av avbildningen som avbildar standardbasen på $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$. Detta är uppenbarligen avbildningen som vi söker. Den första avbildningen ges av inversen till A där A avbildar standardbasen på $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ och om vi kallar den andra matrisen för B så får vi enligt bassatsen att

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ så } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

och

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Det ger att den sökta matrisen är

$$BA^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 11 \\ -7 & 13 \end{pmatrix}.$$