Lösningar till utvalda uppgifter i kapitel 4

4.6 (a) Vi beräknar skalärprodukten

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u}_1 \cdot \left(\mathbf{v}_2 - \sum_{i=1}^{2-1} \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_i}{\mid \mathbf{u}_i \mid^2} \mathbf{u}_i \right) = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mid \mathbf{u}_1 \mid^2} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 \\ &= \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1 = 0,\end{aligned}$$

så alltså är de ortogonala.

(b) Vi gör ett induktionsbevis över $m = i + j$. Vi har ett basfall redan från första deluppgiften, nämligen $i + j = 3$ vilket är det minsta fallet då $i \neq j$. Antag att påståendet är sant för alla par (i, j) där $i + j < m$. Vi ska visa att då gäller det även för $i + j = m$. Vi kan av symmetriskäl anta att $i < j$. Vi beräknar skalärprodukten och får

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j &= \mathbf{u}_i \cdot \left(\mathbf{v}_j - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{u}_k}{\mid \mathbf{u}_k \mid^2} \mathbf{u}_k \right) \\ &= \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{u}_k}{\mid \mathbf{u}_k \mid^2} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_k \\ &= \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{u}_i = 0,\end{aligned}$$

där den näst sista likheten följer av induktionsantagandet eftersom $i + k < i + j$ så $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_k = 0$ om $k \neq i$. Alltså är $\mathbf{u}_i$ och $\mathbf{u}_j$ ortogonala.

Därmed följer det att det gäller för samtliga par (i, j).

4.9 Antag att A är symmetrisk, d v s att $A = A^t$. Låt $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ vara kolumnerna i A. Då gäller att

$$\mathbf{0} = A\mathbf{x} = A^t\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^t \\ \mathbf{a}_2^t \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^t \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^t\mathbf{x} \\ \mathbf{a}_2^t\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^t\mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{x} \end{pmatrix}.$$

Med andra ord så är $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} = 0$ för alla i så $\mathbf{x}$ är ortogonal mot alla kolumnvektorerna, vilket var precis vad vi skulle visa.

4.10 Vi subtraherar C ifrån båda leden och får då $AXB = D - C$. Eftersom både A och B är inverterbara så kan vi multiplicera båda leden med dessa matrisers respektive inverser ifrån vänster respektive höger vilket ger

$$\begin{aligned} AXB = D - C \quad &\Leftrightarrow \quad A^{-1}(AXB)B^{-1} = A^{-1}(D - C)B^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad (A^{-1}A)X(BB^{-1}) = A^{-1}(D - C)B^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad X = A^{-1}(D - C)B^{-1}. \end{aligned}$$

Alltså är $X = A^{-1}(D - C)B^{-1}$ en unik lösning till ekvationen.