

Lösningar till utvalda uppgifter i kapitel 5

5.2 Subtraherar vi två gånger den första ekvationen ifrån den andra så får vi

$$-5y - 2z = -8.$$

Parametrisera genom att (tex) sätta $y = 2t$ vilket ger $z = 4 - 5t$. Löser vi ut x ur den första ekvationen får vi slutligen

$$x = 5 - 2y - 2z = 5 - 4t - 8 + 10t = -3 + 6t.$$

Vi får alltså

$$\begin{cases} x = -3 + 6t \\ y = 2t \\ z = 4 - 5t. \end{cases}$$

(Observera att det finns oändligt många olika korrekta svar beroende på hur man väljer att parametrisera.)

5.5 Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -10 \end{pmatrix}.$$

Detta ger $z = -10/9$, $y = -4 - 4(-10/9) = 4/9$ och $x = 3 - 10/9 - 2 \cdot 4/9 = 1$.

5.6 Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 5 & 9 \\ 3 & 12 & 3 & 18 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Detta ger z fri, $y = (1 + z)/2$ och $x = 4 - 3z$.

5.7 Vi gör Gausselimination

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & -6 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5/2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4/3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -5/2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4/3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4/3 \end{pmatrix}$$

Från detta får vi en lösning med två fria parametrar och alltså geometriskt ett plan i \mathbb{R}^5 . En parametrisering av planet ges av

$$\mathbf{x} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -5/3 \\ 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.8 Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & a & 4 \\ 2 & a & a & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & a+2 & -2 \\ 0 & a-4 & a+2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & \frac{a+2}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{a^2}{2} - 2 & -a \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{a+2}{2} & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 4 & -2a \end{pmatrix}.$$

Denna har ej unik lösning om och endast om $a^2 - 4 = 0$, d v s om och endast om $a = \pm 2$. I dessa fall blir $-2a = \mp 4$ så ekvationssystemet saknar då lösning.

5.9 Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & a & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a + \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Från detta ser vi att vi har unik lösning om $a \neq -\frac{5}{2}$ och då $a = -\frac{5}{2}$ så har vi oändligt många lösningar. Svaret är alltså: inte för några värden alls.

5.14 De fem punkterna ger följande ekvationssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Om vi betecknar koefficientmatrisen med A och högerledsvektorn med \mathbf{b} så ges minstakvadratlösningen av lösningen till $A^t A \mathbf{x} = A^t \mathbf{b}$. Multiplikation med A^t ger

$$A^t A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{pmatrix} \text{ och } A^t \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 28 \\ 59 \\ 165 \end{pmatrix}.$$

Vi löser detta ekvationssystem med Gausselimination

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 30 & 28 \\ 10 & 30 & 100 & 59 \\ 30 & 100 & 354 & 165 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & \frac{28}{5} \\ 0 & 10 & 40 & 3 \\ 0 & 40 & 174 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & \frac{28}{5} \\ 0 & 1 & 4 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 14 & -15 \end{pmatrix},$$

vilket ger $c = -15/14$, $b = 3/10 - 4(-15/14) = 321/70$ och $a = 28/5 - 6(-15/14) - 2(321/70) = 20/7$ så svaret blir

$$y = \frac{20}{7} + \frac{321}{70}x - \frac{15}{14}x^2.$$

- 5.15 (a) Man kan t ex ta vilka två kolumner som helst i A .
 (b) Gausselimination ger

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & -1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -10 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$

varifrån vi ser att det finns vektorer \mathbf{c} sådana att $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ saknar lösning. (I själva verket gäller det för alla vektorer utom det plan som spänns upp av två av kolumnerna i A .) Ett exempel är $\mathbf{c} = (0 \ 0 \ 1)^t$ då vi ser att denna inte kommer att påverkas av Gausseliminationen och sista ekvationen blir då $0 = 1$.

- 5.16 Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & a-b & -1 & 2 \\ 2 & 4 & b+1 & a-2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & a-b & -1 & 2 \\ 0 & 0 & b-5 & a-2 \end{pmatrix}$$

Från detta ser vi att vi har determinanten lika med noll om och endast om $a = b$ eller $b = 5$.

Om $b = 5$ så blir sista ekvationen $0 = a - 2$ så då måste $a = 2$ för att vi ska kunna ha någon lösning. Detta fallet ger en lösning eftersom det inte blir några problem med de två första ekvationerna.

Om $a = b$, så får vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & b-5 & b-2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3b-12 \end{pmatrix}$$

Denna har (oändligt många) lösningar om och endast om $3b - 12 = 0$,
dvs $b = 4$.

Svaret är alltså: $(2, 5)$ och $(4, 4)$.