Lösningar till utvalda uppgifter i kapitel 6

6.4 (a) Genom att subtrahera andra kolumnen ifrån den tredje och sedan den första kolumnen ifrån den andra får vi:

$$\det(()\,A) = \begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 \\ (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 \\ (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2x+3 \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2x+5 \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2x+7 \end{vmatrix}.$$

Subtrahera sedan åter andra kolumnen ifrån den tredje:

$$\det(()\,A) = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2x+3 \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2x+5 \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2x+7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2 \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Subtrahera nu andra raden ifrån den tredje och därefter den första raden ifrån den andra:

$$\det(()\,A) = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2 \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ 2x+1 & 2 & 0 \\ 2x+3 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Subtrahera nu till slut återigen den andra raden ifrån den tredje och vi får en diagonal matris som vi lätt räknar ut:

$$\det(()\,A) = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ 2x+1 & 2 & 0 \\ 2x+3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ 2x+1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8.$$

Alternativt kan man förstås använda Sarrus regel och förenkla det sjättegradspolynom man får.

(b) Antag att $n \geq 4$. De fyra första kolumnerna i A ser ut så här:

$$\det(()\,A) = \begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 & \cdots \\ (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2 & \cdots \\ (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2 & (x+5)^2 & \cdots \\ (x+3)^2 & (x+4)^2 & (x+5)^2 & (x+6)^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Vi subtraherar 3:e kolonnen ifrån den 4:e, 2:a kolonnen ifrån den 3:e och slutligen den 1:a kolonnen ifrån den 2:a. Detta ändrar inte värdet på determinanten och eftersom $(x+n)^2 - (x+(n-1))^2 = 2x + 2n - 1$ så får vi då:

$$\det(()\,A) = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2x+3 & 2x+5 & \cdots \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2x+5 & 2x+7 & \cdots \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2x+7 & 2x+9 & \cdots \\ (x+3)^2 & 2x+7 & 2x+9 & 2x+11 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Vi subtraherar nu återigen 3:e kolonnen ifrån den 4:e och 2:a kolonnen ifrån den 3:e och får nu

$$\det(()\,A) = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 & 2 & \cdots \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2 & 2 & \cdots \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2 & 2 & \cdots \\ (x+3)^2 & 2x+7 & 2 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0,$$

eftersom två kolonner är identiska.

(c) Det räcker att ta ett exempel och beräkna determinanten och se att den inte blir noll. Sätt t ex $x = 0$ vilket ger

$$\det(()\,A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = -8.$$

I själva verket är den -8 oavsett vilket x man väljer!