Lösningar till utvalda uppgifter i kapitel 7

7.1 Vi beräknar determinanten av matrisen med de tre vektorerna som rader. Denna är skild från noll om och endast om vektorerna är linjärt oberoende. Vi får med hjälp av elementära radoperationer att

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-8-1) = -9 \neq 0,$$

så de är linjärt oberoende.

7.2 Vi beräknar determinanten av matrisen med de tre vektorerna som rader. Denna är skild från noll om och endast om vektorerna är linjärt oberoende. Vi får med hjälp av elementära radoperationer att

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2-2) = 0,$$

så de är linjärt beroende.

7.3 Vi beräknar determinanten för matrisen med vektorerna som kolumner och får $15 - 2a - a^2$. Vektorerna är linjärt beroende om och endast om determinanten är lika med 0. Vi löser alltså andragradsekvationen $15 - 2a - a^2 = 0$ vilket ger lösningarna $a_1 = -5$ och $a_2 = 3$.

7.6 Vi ska visa att vektorerna är parvis ortogonala och har längd 1 vilket är ekvivalent med att $M^tM = I$. Eftersom $2^2 + 3^2 + 6^2 = 4 + 9 + 36 = 49 = 7^2$ så har alla vektorerna längd 1. Dessutom är $2{\cdot}3 + 3{\cdot}(-6) + 6{\cdot}2 = 6 - 18 + 12 = 0$ så $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är ortogonala. På samma sätt får man att skalärprodukten mellan $\mathbf{v}_3$ och de andra vektorerna är 0 och därmed att de är parvis ortogonala.

7.8 Vi låter F vara matrisen som har $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ som kolonner. Då gäller att $\mathbf{x}$ koordinater i standardbasen, $\mathbf{x}_E$, och dess koordinater i F-basen, $\mathbf{x}_F$, uppfyller

$$\mathbf{x}_F = F^{-1}\mathbf{x}_E.$$

Eftersom F är en ON-matris så är $F^{-1} = F^t$. Vi beräknar först

$$\mathbf{f}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Vi får då

$$\mathbf{x}_F = F^{-1}\mathbf{x}_E = F^t\mathbf{x}_E = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 4/3\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Kontrollera att det stämmer, d v s att $0\cdot\mathbf{f}_1 + \frac{5}{3}\cdot\mathbf{f}_2 + \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\mathbf{f}_3$ har koordinaterna $(1, 1, 1)$:

$$0\cdot\mathbf{f}_1 + \frac{5}{3}\cdot\mathbf{f}_2 + \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\mathbf{f}_3 = \frac{5}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7.9 (a) Betraktat i planet som spänns upp av $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ så är avbildningen rotation kring origo $\pi/4$ radianer moturs. Denna har matrisen

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den tredje basvektorn är oförändrad så totalt blir matrisen

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Om $\mathbf{x}$ är koordinaterna i standardbasen och $\mathbf{x}_V$ är koordinaterna i basen V så gäller sambandet att $\mathbf{x} = V\mathbf{x}_V$. Vi får alltså

$$\mathbf{x} = V\mathbf{x}_V = \begin{pmatrix} 1 & 15 & 3 \\ 3 & 7 & -3 \\ 3 & -12 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+30+9 \\ 3+14-9 \\ 3-24+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 8 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

7.10 (a) Basvektorerna $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ är oförändrade och $\mathbf{f}_3$ avbildas på nollvektorn så matrisen i basen F ges av

$$A_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Matrisen för L i standardbasen ges enligt känd sats av (observera att F är en ON-matris så $F^{-1} = F^t$)

$$\begin{aligned} A &= FA_FF^{-1} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 13 & -12 & 18 \\ -12 & 45 & 6 \\ 18 & 6 & 40 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7.11 Låt $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1\,1\,2)^t$ vara en normerad normalvektor till planet och bestäm $\mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ så att de har längd 1, är ortogonala och spänner upp planet. Man kan t ex ta $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\,-1\,0)^t$ och $\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2$ (eller direkt observera att) $\mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\,1\,-1)^t$ duger. I basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ har avbildningen matrisen

$$A_F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Det ger att den i standardbasen har matrisen

$$A = FA_FF^{-1} = FA_FF^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alternativt kan man direkt utnyttja att

$$A = I - 2\mathbf{f}_1\mathbf{f}_1^t.$$

7.12 (a) Enligt definitionen av skalärprodukt gäller för vinkeln α mellan $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ att

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2},$$

så $\alpha = \pi/3$ radianer eller 60 grader.

(b) Vektorn $\mathbf{v}_3$ ska alltså ligga i planet och vara ortogonal mot $\mathbf{v}_2$ så den ska uppfylla

$$\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \text{ och } \mathbf{v}_3 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$$

för några tal a och b. Om vi sätter in linjärkombinationen i den första ekvationen får vi

$$0 = (a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_2 = a\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + b\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = a + b.$$

Vi har alltså lösningen $a = -b$ så

$$\mathbf{v}_3 = a(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = a\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

För att få längd 1 sätter vi $a = 1/\sqrt{3}$.

(c) Det finns två möjligheter och den som ger ett högerorienterat system är

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$