Lösningar till utvalda uppgifter i kapitel 8

8.2 Alla vektorer som är normaler till planet, d v s vektorer på formen $(0\ 0\ z)^t$, avbildas på nollvektorn. Dessa kommer därför att vara egenvektorer med egenvärdet 0.

Alla vektorer som är parallella med planet, d v s vektorer på formen $(x\ y\ 0)^t$ kommer att vara oförändrade så de kommer alltså att vara egenvektorer med egenvärdet 1.

Vi har nu hittat tre linjärt oberoende egenvektorer (t ex de tre enhetsvektorerna) och därmed har vi hittat alla egenvektorer och egenvärden eftersom en 3×3-matris inte kan ha fler egenvektorer.

8.3 Alla vektorer som är normaler till planet, d v s vektorer på formen $(0\ 0\ z)^t$, har spegelbild den vektor som är lika lång och pekar i precis motsatt riktning. Dessa kommer därför att vara egenvektorer med egenvärdet -1.

Alla vektorer som är parallella med planet, d v s vektorer på formen $(x\ y\ 0)^t$ kommer att vara oförändrade så de kommer alltså att vara egenvektorer med egenvärdet 1.

Vi har nu hittat tre linjärt oberoende egenvektorer (t ex de tre enhetsvektorerna) och därmed har vi hittat alla egenvektorer och egenvärden eftersom en 3×3-matris inte kan ha fler egenvektorer.

8.4 (a) Den karakteristiska ekvationen är

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - x & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - x \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x$$

som har lösningarna $x = 0$ och $x = 1$ som därmed är de två egenvärdena. Egenvektorerna får man genom att dels lösa $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ som ger multiplar av $(1\ \ -1)^t$ och dels

$$\mathbf{0} = A\mathbf{x} - \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

som har lösning alla multipler av $(1\ 1)^t$. Vi har alltså att 0 är egenvärde med egenvektorer alla multiplar av $(1\ \ -1)^t$ och att 1 är egenvärde med egenvektorer alla multiplar av $(1\ 1)^t$.

(b) De två egenvektorerna är ortogonala. Multipler av $(1\ 1)^t$ är oförändrade och de ortogonala vektorerna avbildas på nollvektorn. Därmed är det ortogonal projektion på linjen genom origo med riktningsvektor $(1\ 1)^t$.

8.5 Den karakteristiska ekvationen ges av

$$0 = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 6 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2),$$

så egenvärdena är de två nollställena 1 och -2.

Sätter man in $\lambda = 1$ så får man ekvationen $-6x + 6y = 0$, vilket ger egenvektorerna $c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sätter man in $\lambda = -2$ så får man ekvationen $-3x + 6y = 0$, vilket ger egenvektorerna $c \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8.7 Vi beräknar en diagonalisering av A för att lätt kunna beräkna den höga potensen.

Vi beräknar egenvärdena till A genom att lösa

$$0 = \det\left(()\, A - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} 1/2-\lambda & -3/2 \\ -3/2 & 1/2-\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\left((1-2\lambda)^2 - 9\right),$$

som har lösningen $2\lambda = 1 \pm 3$, d v s $\lambda = -1$ respektive $\lambda = 2$.

Motsvarande egenvektorer får vi genom att lösa ekvationssystemen

$$\begin{pmatrix} 1/2-(-1) & -3/2 \\ -3/2 & 1/2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 \\ -3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

respektive

$$\begin{pmatrix} 1/2-2 & -3/2 \\ -3/2 & 1/2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & -3/2 \\ -3/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Dessa har lösningarna $\mathbf{v}_1 = t\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ respektive $\mathbf{v}_2 = t\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. Normerar vi så får vi ON-matrisen

$$P = (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliseringen av A blir då $A = PDP^{-1}$ där D är diagonal med -1 och 2 på diagonalen och $P^{-1} = P^t$. Till slut blir då

$$\begin{aligned} A^{1000} &= PD^{1000}P^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^{1000} & 0 \\ 0 & 2^{1000} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+2^{1000} & 1-2^{1000} \\ 1-2^{1000} & 1+2^{1000} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

8.8 Vi vet att en matris som uppfyller kraven är $A = PDP^{-1}$, där D är en diagonalmatris med egenvärdena på diagonalen och P en matris med egenvektorerna som kolonner. Observera att de tre egenvektorerna är ortogonala, så vi kan välja P som en ON-matris genom att normera egenvektorerna. Därmed kommer vi att ha $P^{-1} = P^t$.

Vi sätter alltså t ex

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ och } P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

vilket ger

$$A = PDP^t = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 34 & 12 & 0 \\ 12 & 41 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}.$$

8.9 Observera att A är symmetrisk så det är möjligt att hitta sådana matriser. Om A har egenvärdena λ_1, λ_2 och λ_3 med motsvarande normaliserade ortogonala egenvektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ så är $A = PDP^t$ där $P = (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3)$ och D är diagonal med egenvärdena på diagonalen. Vi bestämmer egenvärden och egenvektorer.

Den karakteristiska ekvationen ges av

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)((3-\lambda)(4-\lambda)-4) + 2(0-2(3-\lambda)) \\ &= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 39\lambda + 28 = -(\lambda-1)(\lambda^2 - 11\lambda + 28) \\ &= -(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-7). \end{aligned}$$

För att faktorisera polynomet använde vi tipset att $\lambda = 1$ är ett egenvärde och löste sedan den återstående andragradsekvationen. Återstår nu att bestämma egenvektorerna.

$\lambda = 1$: Likheten $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$ ger

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

vilket ger $\mathbf{v}_1 = (1/3) \cdot (-1\ 2\ 2)^t$.

$\lambda = 4$: Likheten $A\mathbf{v}_2 = 4\mathbf{v}_2$ ger

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & -2 & -4\end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

vilket ger $\mathbf{v}_2 = (1/3)\cdot(2\ 2\ -1)^t$.

$\lambda = 7$: Likheten $A\mathbf{v}_2 = 7\mathbf{v}_2$ ger

$$\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ 0 & -4 & -2\\ 2 & -2 & -3\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ 0 & -4 & -2\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

vilket ger $\mathbf{v}_3 = (1/3)\cdot(-2\ 1\ -2)^t$.

Vi får alltså

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 2 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -2\end{pmatrix} \text{ och } D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}.$$

8.10 Från satserna om diagonalisering så vet vi att en matris A som uppfyller kraven ges av

$$A = MDM^{-1},$$

där D är en diagonalmatris med egenvärdena på diagonalen. Observera att M är en ON-matris så $M^{-1} = M^t$. Den är dessutom symmetrisk så i själva verket är $M^{-1} = M$. Vi får alltså

$$A = \frac{1}{49}\begin{pmatrix}2 & 3 & 6\\ 3 & -6 & 2\\ 6 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & 6\\ 3 & -6 & 2\\ 6 & 2 & -3\end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix}130 & 6 & -30\\ 6 & 93 & -24\\ -30 & -24 & 71\end{pmatrix}$$

8.11 Alla vektorer i planet kommer att vara oförändrade så dessa är egenvektorer med egenvärdet 1. De vektorer som är vinkelräta mot planet avbildas på nollvektorn så dessa har egenvärdet 0. Summerar vi så är alltså $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ tre linjärt oberoende egenvektorer med egenvärdena 1, 1 och 0. Några fler finns det inte, eftersom vi bara kan ha högst tre linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$.

8.12 (a) Den är reflexiv eftersom om vi väljer P att vara identitetsmatrisen så är $A = PAP^{-1}$ och därmed är A konjugerad med sig själv. Den är symmetrisk eftersom om $A = PBP^{-1}$ så är ju $B = P^{-1}AP$ så om A är konjugerad med B så är B konjugerad med A. Den är transitiv eftersom om $A = P_1BP_1^{-1}$ och $B = P_2CP_2^{-1}$, så är

$$A = P_1BP_1^{-1} = P_1P_2CP_2^{-1}P_1^{-1} = (P_1P_2)C(P_1P_2)^{-1}.$$

Med andra ord om A är konjugerad med B och B är konjugerad med C så är A konjugerad med C vilket precis är villkoret för transitiviteten.

Eftersom den är reflexiv, symmetrisk och transitiv så är den per definition en ekvivalensrelation.

(b) Antag att A och B är konjugerade och att λ är ett egenvärde till A. Det räcker att visa att då är λ ett egenvärde också till B, ty då är alla egenvärden till A egenvärden till B och omvändningen följer av symmetrin.

Vi antar alltså att $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ för någon vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ och $A = PBP^{-1}$ för en inverterbar matris P. Då får vi att

$$B(P^{-1}\mathbf{v}) = (P^{-1}AP)P^{-1}\mathbf{v} = P^{-1}A\mathbf{v} = P^{-1}\lambda\mathbf{v} = \lambda P^{-1}\mathbf{v},$$

så λ är alltså ett egenvärde till B med egenvektorn $P^{-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

8.13 (a) Alla vektorer i planet som vi projicerar på, d v s alla linjärkombinationer av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$, är oförändrade och är alltså egenvektorer med egenvärdet 1. De vektorer som är ortogonala mot planet, d v s multiplar av $\mathbf{v}_3$, avbildas på nollvektorn och är alltså egenvektorer med egenvärdet 0. Detta är alla egenvärden och egenvektorer då vi har tre linjärt oberoende egenvektorer.

(b) Låt F vara matrisen som har basvektorerna som kolumner. I basen F är matrisen för avbildningen

$$A_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Denna är relaterad till matrisen A i standardbasen genom $A = FA_FF^{-1}$ och eftersom F är en ON-matris så är $F^{-1} = F^t$ och vi får att

$$A = FA_FF^t = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

8.14 Förutsättningarna ger att

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\beta \\ 1-\alpha & \beta \end{pmatrix}$$

med $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$. Den karakteristiska ekvationen blir då

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 1-\beta \\ 1-\alpha & \beta-\lambda \end{vmatrix} = (\alpha-\lambda)(\beta-\lambda) - (1-\alpha)(1-\beta) \\ &= \lambda^2 - (\alpha+\beta)\lambda + (\alpha+\beta-1) = (\lambda-1)(\lambda-(\alpha+\beta-1)), \end{aligned}$$

så att A har alltså egenvärdena $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = \alpha + \beta - 1$. Dessutom gäller att

$$\lambda_2 = \alpha+\beta-1 \geq 0+0-1 \geq -1 \text{ och } \lambda_2 = \alpha+\beta-1 \leq 1+1-1 \leq 1$$

och därmed är saken klar.

8.15 Ett alternativ är (förstås) nollmatrisen som har alla vektorer som egenvektorer med egenvärdet 0. Allmänt så ska den karakteristiska ekvationen ha 0 som dubbelrot. Om

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

så är karakteristiska ekvationen

$$0 = \det(() A - \lambda I) = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc).$$

Vi ska alltså ha $a + d = 0$ och $ad - bc = 0$. Den första ger $a = -d$ som insatt i den andra ger $d^2 = -bc$. En möjlighet är $d = b = 1$ och $a = c = -1$, d v s

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.16 (a) Vi vet att egenvärdena är nollställen till det karakteristiska polynomet $\det(() A - \lambda I) = 0$. För en 3×3-matris är detta ett tredjegradspolynom. Om man räknar ut detta så får man

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2 + b\lambda + c,$$

där b och c är kombinationer av koefficienterna som vi inte behöver bry oss om. Allmänt för ett tredjegradspolynom $p(x)$ gäller att om det har rötterna x_1, x_2 och x_3 så är

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ &= x^3 - (x_1+x_2+x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Alltså är summan av rötterna lika med minus koefficienten framför x^2. För det karakteristiska polynomet betyder det att summan av egenvärdena (som ju är summan av rötterna) är lika med $a_{11} + a_{22} + a_{33}$. (Notera att det är minustecken framför λ^3.) Detta var precis det vi ville visa.

(b) Samma resonemang fungerar för en $n \times n$-matris och ett polynom av grad n. I detta fallet är koefficienten framför x^{n-1} lika med minus summan av rötterna och när man räknar ut det karakteristiska polynomet så får man grad $n-1$ på λ endast då man multiplicerar ihop alla elementen på diagonalen. Denna produkt ger

$$\prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - \lambda) = (-1)^n(\lambda^n - \lambda^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \dots .$$

Vi ser alltså återigen att summan av egenvärdena, d v s summan av rötterna, är lika med summan av elementen på diagonalen.

8.17 (a) Vi vet att en 3×3-matris med tre linjärt oberoende egenvektorer är diagonaliserbar och vi använder diagonaliseringen baklänges här för att hitta A med de givna egenvärdena och egenvektorerna. Sätt D som diagonalmatrisen med egenvärdena på diagonalen och låt P vara matrisen med egenvektorerna som kolumner. Då är $A = PDP^{-1}$ en matris med de efterfrågade egenskaperna. Eftersom egenvektorerna är ortogonala kan vi normalisera dem så att P blir en ON-matris och därmed $P^{-1} = P^t$. Alltså med

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ och } P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

så är ett exempel på en eftersökt matris

$$A = PDP^t = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 11 & 8 & -2 \\ 8 & 5 & 10 \\ -2 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Vi kan se att de tre vektorerna är linjärt beroende genom att t ex beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -8 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Det finns en sats som säger att egenvektorer till olika egenvärden är linjärt oberoende. Vi har alltså en motsägelse så det kan omöjligt vara så att dessa tre vektorer kan vara egenvektorer till de tre olika egenvärdena 2, 1 respektive -1. (Detta är också den enda sak som kan förstöra för oss för om de är linjärt oberoende så fungerar strategin vi använde i lösningen av första deluppgiften.)

8.18 Eftersom A är en 2×2-matris med två olika egenvärden så är den diagonaliserbar, $A = PDP^{-1}$, där

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

är en diagonalmatris. Vi får då att

$$A^n = PD^nP^{-1} \text{ där } D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

Eftersom $|\lambda_1| < 1$ och $|\lambda_2| < 1$ så är

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_1^n = \lim_{n\to\infty} \lambda_2^n = 0.$$

Därmed kommer D^n att närma sig nollmatrisen när n växer mot oändligheten och eftersom P är en konstant matris så kommer också A^n att närma sig nollmatrisen när n växer mot oändligheten. Det betyder att alla elementen i A^n närmar sig 0 och därmed att

$$\lim_{n\to\infty} \|A^n\| = 0.$$