Lösningar till utvalda uppgifter i kapitel 9

9.3 (a) Grannmatris:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Övergångsmatris:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Den stationära fördelningen kan man få genom att ta graden för varje nod dividerat med två gånger det totala antalet kanter. Graden för noderna är i ordning $2, 3, 2, 1$ och det finns 4 kanter så den stationära fördelningen blir

$$\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

9.4 (a) Låt x_n vara antalet bilar på Landvetter vecka n och y_n antalet bilar på Centralen vecka n och sätt $\mathbf{v}_n = \left(\begin{smallmatrix} x_n \\ y_n \end{smallmatrix}\right)$. Informationen kan sammanfattas i det rekursiva sambandet

$$\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} 0.88 & 0.1 \\ 0.12 & 0.9 \end{pmatrix} \mathbf{v}_n.$$

Vi bestämmer egenvärden för A och får via den karakteristiska ekvationen

$$0 = \begin{vmatrix} 0.88 - \lambda & 0.1 \\ 0.12 & 0.9 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.78\lambda - 0.78 = (\lambda - 1)(\lambda - 0.78).$$

Vi har alltså egenvärdena $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 0.78$ och om $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ är motsvarande egenvektorer så får vi att

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_n &= A^n \mathbf{v}_0 = A^n(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2) = \alpha_1 \lambda_1^n \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \lambda_2^n \mathbf{e}_2 \\ &= \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 (0.78)^n \mathbf{e}_2 \longrightarrow \alpha_1 \mathbf{e}_1 \text{ då } n \to \infty. \end{aligned}$$

Det gäller alltså att räkna ut $\mathbf{e}_1$ som ger proportionerna.

Det homogena systemet $A\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$ har matrisen

$$A - I = \begin{pmatrix} -0.12 & 0.1 \\ 0.12 & -0.1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -0.12 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vilket har lösningarna $t\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$. Andelen på Landvetterkontoret blir alltså $5/(5+6) = 5/11$.

(b) Antag att vi har fördelningen med 70% av bilarna på Landvetter så att $\mathbf{v}_n = \left(\begin{smallmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{smallmatrix}\right)$. Då får vi

$$\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} 0.88 & 0.1 \\ 0.12 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.646 \\ 0.354 \end{pmatrix}$$

så för att ha 70% också i början av veckan därpå måste $0.7 - 0.646 = 0.054$, d v s 5.4% av totala bilparken köras från Centralen ut till Landvetter.

9.5 Låt C_n vara antalet bilar på Centralen i början av vecka n, L_n antalet på Landvetter och U_n antalet som är uthyrda. Sätt $\mathbf{x}_n = (C_n \ L_n \ U_n)^t$. Informationen i uppgiften ger då att

$$\mathbf{x}_{n+1} = P\mathbf{x}_n = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x}_n.$$

En stationär fördelning $\mathbf{v}$ måste vara en egenvektor till P med egenvärdet 1 så det är alltså en lösning till $P\mathbf{v} = \mathbf{v}$, d v s

$$\mathbf{0} = (P - I)\mathbf{v} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{v}.$$

Vi löser detta homogena ekvationssystem med Gausselimination och får

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -11 & 9 \\ 0 & 11 & -9 \end{pmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -14/11 \\ 0 & 1 & -9/11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Detta ger lösningarna

$$\mathbf{v} = t \begin{pmatrix} 14/11 \\ 9/11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

som efter normering med $t = 1/(14/11 + 9/11 + 1) = 11/34$ ger fördelningen

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 7/17 \\ 9/34 \\ 11/34 \end{pmatrix},$$

så exempelvis är $7/17$ av samtliga bilar på kontoret på Centralen.

9.6 (a) Vår startfördelning är $\mathbf{x}_0^t = (1/3\ 1/3\ 1/3)$ och vi får fördelningen $\mathbf{x}_1^t$ efter ett steg genom

$$\mathbf{x}_1^t = \mathbf{x}_0^t M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

så sannolikheten att vara i nod a är $1/4$.

(b) Den stationära fördelningen $\mathbf{x}$ uppfyller $\mathbf{x}^t = \mathbf{x}^t M$ vilket är ekvivalent med $M^t\mathbf{x} = \mathbf{x}$ som i sin tur är ekvivalent med $(M^t - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Gausselimination ger

$$\begin{aligned} M^t - I \quad &= \quad \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & 4 & 2 \\ 3 & -8 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -8 & 2 \\ -9 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -8 & 2 \\ 0 & -20 & 8 \\ 0 & 10 & -4 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -8 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen är $z = t$, $y = 2z/5 = 2t/5$ och $x = y = 2t/5$. Summan av elementen ska vara 1 så vi ska välja $t = 5/9$ och den sökta stationära fördelningen är $\mathbf{x}^t = (2/9\ 2/9\ 5/9)$.