Lösningar till utvalda uppgifter i kapitel 1

1.13 Vi utnyttjar definitionen av skalärprodukt som ger att

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|},$$

där α är (minsta) vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. I vårt fall så får vi

$$\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{1}{2}.$$

Alltså är den sökta vinkeln $\alpha = \arccos\frac{1}{2} = \pi/3$.

1.14 Vi har att $\cos 60 = 1/2$ så enligt definitionen av skalärprodukt så har vi

$$\frac{1}{2} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{2\,\|\mathbf{w}\|} \iff 1 = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}.$$

Man kan ansätta en godtycklig vektor och se vad villkoren blir, men kanske ser man direkt att t ex både

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

löser ekvationen.

1.15 (a) De är ortogonala om och endast om skalärprodukten är noll. Vi får

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \begin{pmatrix}1\\3\\x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix} = 3-9+2x = 2x-6,$$

så de är ortogonala om och endast $x = 3$.

(b) Vi får en sökt vektor $\mathbf{e}$ genom att multiplicera $\mathbf{v}$ med inversen av dess längd, d v s

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}.$$

(c) Den ortogonala projektionen $\mathbf{u}_L$ ges av

$$\mathbf{u}_L = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} = \frac{2x-6}{22}\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix} = \frac{x-3}{11}\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}.$$

1.23 En riktningsvektor för planet ges av riktningsvektorn för linjen $\mathbf{v}_1 = (1\ 2\ 3)^t$. En andra riktningsvektor $\mathbf{v}_2$ får man genom att ta vektorn från origo till en punkt på linjen, t ex $(2, 2, 3)$. Det ger $\mathbf{v}_2 = (2\ 2\ 3)^t$. Vi får nu en normalvektor till planet

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Därmed är ekvationen för planet given av $3y - 2z + d = 0$, där $d = 0$ eftersom planet går genom origo. Svaret är alltså $3y - 2z = 0$.

1.24 Vi bestämmer de två vektorerna

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{P_3P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{v} = \overrightarrow{P_3P_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

som spänner upp planet. En normal till planet ges då av

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

vilket ger att planet har en ekvation på formen $x - y + d = 0$. För att bestämma d sätter vi in t ex punkten P_3 och får $-1 + d = 0$ och slutligen alltså att ekvationen är

$$x - y + 1 = 0.$$

1.25 (a) En riktningsvektor ges av

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -1-3 \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

så

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 4t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

är en ekvation för linjen.

(b) Det finns oändligt många plan som innehåller linjen och om vi tar ett plan med ekvationen $Ax + By + Cz + D = 0$ så ligger linjen på detta om och endast om

$$0 = A(1+t) + B(3-4t) + C(4+t) + D = (A+3B+4C+D) + (A-4B+C)t$$

för alla t. Detta är ekvivalent med att

$$\begin{cases} A + 3B + 4C + D = 0 \\ A - 4B + C = 0 \end{cases}$$

Detta är ekvivalent med (vi subtraherar den första ekvationen från den andra)

$$\begin{cases} A + 3B + 4C + D = 0 \\ -7B - 3C = 0 \end{cases}$$

vilket har lösningarna $D = s, C = 7t, B = -3t$ och $A = -19t - s$ där s och t är fria parametrar. Ett exempel får vi om vi sätter $s = 1$ och $t = 0$:

$$-x + 1 = 0.$$

1.26 Låt $Q = (2, 2, 3)$. Då är Q en punkt på linjen. Om $\overrightarrow{QP}_L$ är ortogonala projektionen av $\overrightarrow{QP}$ på linjen så ges avståndet d från P till linjen av

$$d = \sqrt{\left\|\overrightarrow{QP}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{QP}_L\right\|^2}.$$

Vektorn

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

är en riktningsvektor för linjen. Vi har att

$$\left\|\overrightarrow{QP}\right\|^2 = \left\|\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right\|^2 = (-1)^2 + 3^2 = 10$$

och

$$\left\|\overrightarrow{QP}_L\right\| = \frac{\left|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{QP}\right|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|-10|}{\sqrt{14}} = 5\sqrt{\frac{2}{7}}.$$

Alltså är det sökta avståndet $d = \sqrt{10 - 50/7} = \sqrt{20/7} = \frac{2}{7}\sqrt{35}$.

1.27 Om Q är en godtycklig punkt i planet så gäller att avståndet från P till planet ges av längden av den ortogonala projektionen, $\overrightarrow{QP}_{\mathbf{n}}$, av $\overrightarrow{QP}$ på normalen till planet.

Vi väljer $Q = (1, -1, -1)$. Då är

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

är en normalvektor. Det sökta avståndet blir då

$$\left\|\overrightarrow{QP}_{\mathbf{n}}\right\| = \frac{\left|\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{QP}\right|}{\|\mathbf{n}\|}\frac{2+12}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}.$$

1.28 Vi ser att planens normaler

$$\begin{pmatrix}4\\2\\8\end{pmatrix} \quad \text{respektive} \quad \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$$

är parallella och därmed är planen parallella och skär alltså inte varann. Avståndet mellan planen är samma överallt och vi kan beräkna det genom att ta en punkt på det första planet, t ex $P = (1, 4, 2)$ och beräkna avståndet ifrån den till det andra planet.

Låt Q vara punkten på det andra planet som ligger närmast P. Vi har att $\overrightarrow{PQ}$ är en normal till planet så $Q = (1 + 2t, 4 + t, 2 + 4t)$ för något t. Vi sätter in detta i planets ekvation (Q ligger ju på planet) och får ekvationen

$$0 = 2(1 + 2t) + (4 + t) + 4(2 + 4t) + 3 = 17 + 21t,$$

vilket har lösningen $t = -17/21$. Det ger att avståndet är

$$\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \left\|t\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\right\| = \frac{17}{21}\sqrt{4+1+16} = \frac{17}{\sqrt{21}}.$$

1.29 Normalen till planet genom $(1, 1, 1)$ har ekvationen

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 3t. \end{cases}$$

Sätter vi in denna i planets ekvation och löser ut t så får vi den punkt som är den ortogonala projektionen av $(1, 1, 1)$ på planet. Vi får

$$0 = 1 + t + 2(1 + 2t) + 3(1 + 3t) + 4 = 10 + 14t,$$

så $t = -10/14 = -5/7$. Den sökta punkten är alltså

$$\begin{cases} x = 1 - 5/7 = 2/7 \\ y = 1 - 2\cdot 5/7 = -3/7 \\ z = 1 - 3\cdot 5/7 - 8/7. \end{cases}$$

1.32 Låt $ABCD$ vara den givna parallellogrammen och låt M_1 vara mittpunkten på diagonalen från A till C och M_2 mittpunkten på diagonalen från B till D. Vi ska visa att $M_1 = M_2$. Det är ekvivalent att visa att $\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{AM_2}$. Villkoren att de är mittpunkter och att $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ ger

$$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

och

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM_2} &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM_1}\end{aligned}$$

och därmed är saken klar.

1.33 Låt parallellogrammen vara $ABCD$. Låt $PQRS$ vara mittpunkterna i kvadraterna på sidorna AB, BC, CD respektive DA. Vi ska visa att $PQRS$ är en kvadrat. Sätt $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{u}$ och $\overrightarrow{AD} = 2\mathbf{v}$. Låt $\mathbf{u}'$ vara vektorn från mittpunkten av AB till P. Då gäller att $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}'\|$ och $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$. På motsvarande sätt låt $\mathbf{v}'$ vara vektorn från S till mittpunkten på AD. Då är $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}'\|$ och $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = 0$. Dessutom gäller att $(\mathbf{u}, \mathbf{u}')$ och $(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ har samma orientering så $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}'$ och $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' = -\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}$. Den sista likheten följer av att om vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}'$ är α så är den mellan $\mathbf{u}'$ och $\mathbf{v}$ $\pi - \alpha$ och $\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$.

Om vi adderar vektorer och utnyttjar att $ABCD$ är en parallellogram så får vi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{SR} = -\mathbf{u}' + \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{v}', \\ \overrightarrow{QR} &= \overrightarrow{PS} = -\mathbf{v}' + \mathbf{v} - \mathbf{u} - \mathbf{u}'.\end{aligned}$$

Vi ska visa att $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \left\|\overrightarrow{QR}\right\|$ och $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR} = 0$. Direkt beräkning samt utnyttjande av sambanden mellan $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{v}'$ ger

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{QR}\right\|^2 &= \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{QR} \\ &= -4\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}' + 4\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR} &= -2\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' \\ &\quad + \|\mathbf{u}'\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}'\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = 0.\end{aligned}$$

Detta var precis vad vi skulle visa och därmed är saken klar.

1.35 Låt $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ vara de två sökta vektorerna. Diagonalerna i den parallellogram som spänns av dessa är $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ samt $\mathbf{a}-\mathbf{b}$. Villkoret är alltså att (t ex) $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| = 3$ och $\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| = 1$. Vi kan nu välja (godtyckligt) två vektorer som har längd 3 respektive 1 som inte är ortogonal. Ett möjligt val är

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{a}-\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Löser vi ut $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ (genom att addera och subtrahera ekvationerna) så får vi

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.37 (a) Vi har att

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|^2$$

och

$$\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|^2.$$

Dessa är lika om och endast om $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, d v s om och endast om $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är ortogonala.

(b) Vektorerna $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ och $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ är diagonalerna i den parallellogram som spänns upp av $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$. Alltså är diagonalerna lika långa om och endast om sidorna är ortogonala, d v s om och endast om parallellogrammen är en rektangel.

1.38 Låt $\mathbf{x} = \mathbf{u}+\mathbf{v}$ och $\mathbf{y} = \mathbf{u}-\mathbf{v}$. Förutsättningarna i uppgiften ger att

$$\|\mathbf{u}\| = 2\|\mathbf{v}\| \text{ och } \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \cos\frac{\pi}{3}\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| = \frac{1}{2}\cdot 2\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2.$$

Den sökta vinkeln α uppfyller att

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}.$$

Genom att utnyttja förutsättningarna så får vi att

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 = 3\|\mathbf{v}\|^2$$

och

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\|^2\,\|\mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) \\ &= (\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) \\ &= 7\|\mathbf{v}\|^2\cdot 3\|\mathbf{v}\|^2.\end{aligned}$$

Det ger att

$$\cos\alpha = \frac{3\|\mathbf{v}\|^2}{\sqrt{7}\sqrt{3}\|\mathbf{v}\|^2} = \sqrt{\frac{3}{7}} \text{ och } \alpha = \arccos\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

1.39 (a) Vi vet att $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$ och att

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \cos\alpha\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| = \frac{1}{3}\|\mathbf{x}\|^2.$$

Vi ska beräkna β där

$$\cos\beta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}.$$

Vi beräknar täljaren och (kvadraten av) nämnaren var för sig:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= (a\mathbf{x}+b\mathbf{y})\cdot(c\mathbf{x}+d\mathbf{y})\\ &= ac\|\mathbf{x}\|^2 + bd\|\mathbf{y}\|^2 + (ad+bc)\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\\ &= (ac+bd+\frac{1}{3}(ad+bc))\|\mathbf{x}\|^2\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 &= ((a\mathbf{x}+b\mathbf{y})\cdot(a\mathbf{x}+b\mathbf{y}))((c\mathbf{x}+d\mathbf{y})\cdot(c\mathbf{x}+d\mathbf{y}))\\ &= \left(a^2\|\mathbf{x}\|^2 + b^2\|\mathbf{y}\|^2 + 2ab\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\right)\\ &\cdot\left(c^2\|\mathbf{x}\|^2 + d^2\|\mathbf{y}\|^2 + 2cd\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\right)\\ &= (a^2+\frac{2}{3}ab+b^2)(c^2+\frac{2}{3}cd+d^2)\|\mathbf{x}\|^4.\end{aligned}$$

Beräknar vi kvoten så får vi att termerna som innehåller längden av $\mathbf{x}$ tar ut varandra och vi får:

$$\beta = \arccos\frac{ac+bd+\frac{1}{3}(ad+bc)}{\sqrt{(a^2+\frac{2}{3}ab+b^2)(c^2+\frac{2}{3}cd+d^2)}}.$$

(b) Vi ska se till att täljaren i argumentet till $\arccos$ blir 0, d v s

$$0 = ac+bd+\frac{1}{3}(ad+bc).$$

En lösning (bland oändligt många) är $a=b=c=1$ och $d=-1$.

1.40 Motstående hörnen i en kub med sidan a och sidorna längs axlarna i koordinatsystemet har koordinaterna:

$$\begin{array}{ccc} (0,0,0) & \text{och} & (a,a,a) \\ (0,0,a) & \text{och} & (a,a,0) \\ (0,a,a) & \text{och} & (a,0,0) \\ (0,a,0) & \text{och} & (a,0,a). \end{array}$$

Rymddiagonalerna är alltså vektorerna

$$\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ -a \\ -a \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a \end{pmatrix}.$$

Längden av var och en av dessa är $\sqrt{3}a$ och skalärprodukten mellan dem är antingen a^2 eller $-a^2$. Det betyder att vinkeln β mellan ett par av dessa vektorer uppfyller

$$\cos\beta = \frac{\pm a^2}{\sqrt{3}a\sqrt{3}a} = \pm\frac{1}{3}.$$

Om $\cos\beta < 0$ så är vinkeln mellan vektorerna trubbig och cosinus av den spetsiga vinkeln mellan diagonalerna är då negationen av det värdet. Alltså är cosinus för vinkeln mellan diagonalerna alltid $1/3$.

1.42 Om någon av vektorerna är nollvektorn så är de olika produkterna trivialt nollvektorn i båda fallen. Antag nu att de inte är nollvektorn.

(a) Enligt definitionen är $\mathbf{x} \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$ för alla vektorer $\mathbf{x}$ och därmed är $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}$ för alla vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

(b) Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella så är $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ och då är förstås även $((\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Om de inte är parallella så är $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ normal till planet som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Då gäller att $\mathbf{x} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u}$ ligger i detta plan och är ortogonal mot $\mathbf{u}$. Vi har att $\mathbf{x} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ om och endast om $\mathbf{x}$ och $\mathbf{v}$ är parallella. Eftersom $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ alla ligger i ett plan och $\mathbf{x}$ och $\mathbf{u}$ är ortogonala så är detta ekvivalent med att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala. Alltså är

$$((\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{x} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

om och endast om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella eller ortogonala.

1.43 Det räcker att visa att det är sant i rummet. Om man är i planet kan man helt enkelt betrakta detta som t ex xy-planet i rummet (med tredje koordinaten lika med noll).

Låt $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ vara sidorna i parallellogrammen som har $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ som diagonalvektorer. Då gäller (lite olika beroende på hur man ordnar och riktar diagonalerna) att $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{u}$ och $\mathbf{y} - \mathbf{x} = \mathbf{v}$ vilket ger att $\mathbf{y} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ och $\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{v})$.

Arean av en parallellogram som spänns upp av två vektorer är lika med längden av deras vektorprodukt. Alltså är arean av P_2 lika med $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ och arean av P_1 lika med $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|$. Räkneregler för vektorprodukt ger

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \times \mathbf{y} &= \frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ &= \frac{1}{4}(\mathbf{u} \times \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{v} - \mathbf{v} \times \mathbf{u} - \mathbf{v} \times \mathbf{v}) \\ &= \frac{1}{4}(\mathbf{0} + \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v} - \mathbf{0}) = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}).\end{aligned}$$

Därmed är arean av P_1 lika med $\frac{1}{2}\,\|(\mathbf{u} \times \mathbf{v})\|$ och alltså hälften av arean av P_2.

1.45 Vi utnyttjar definitionen av skalärprodukt som säger att vinkeln α mellan två vektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ satisfierar

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}.$$

Vinklarna mellan paren av de tre vektorerna uppfyller därmed

$$\begin{aligned}\cos\gamma_1 &= \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\|\,\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{-6}{\sqrt{14} \cdot 3} = -\frac{2}{\sqrt{14}} \\ \cos\gamma_2 &= \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_1\|\,\|\mathbf{v}_3\|} = \frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{17}} \\ \cos\gamma_3 &= \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_2\|\,\|\mathbf{v}_3\|} = \frac{-12}{3\sqrt{17}} = -\frac{4}{\sqrt{17}}.\end{aligned}$$

Eftersom vinkeln blir större då cosinus för den minskar (i intervallet $[0, \pi]$ som är det som är intressant) och

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^2 = \frac{2}{7} < \frac{16}{17} = \left(-\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2,$$

så följer det att γ_3 är störst. Svaret är alltså vinkeln mellan $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$.

1.46 En godtycklig vektor i detta plan är en linjärkombination $a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$. Villkoret att den är ortogonal mot $\mathbf{v}$ är ekvivalent med

$$0 = \mathbf{v} \cdot (a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = a\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + b\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 4a + 9b.$$

Ett möjligt val är $a = 9$ och $b = -4$. Detta ger vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Lösningar till utvalda uppgifter i kapitel 2

2.6 Vi beräknar determinanten av matrisen med de tre vektorerna som kolumner. Absolutbeloppet av denna ger volymen av parallellepipeden som de spänner upp. Vi får att

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}2 & 3 & 6\\ 3 & -6 & 2\\ 6 & 2 & -3\end{vmatrix} &= 2(-6\cdot -3 - 2\cdot 2)\\ &\quad + 3(2\cdot 6 - 3\cdot -3) + 6(3\cdot 2 - (-6)\cdot 6)\\ &= 28 + 63 + 252 = 343.\end{aligned}$$

Alternativt kunde man observerat att de är ortogonala och i själva verket 7 gånger en ON-bas, så vi har en kub med sidan 7. Detta ger ju också att volymen är $7^3 = 343$.

2.10

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2 & 1+2\\ 2 & 4 & 2+4\\ 3 & 6 & 3+6\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 3 & 6 & 3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 4\\ 3 & 6 & 6\end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$$

Det andra steget utnyttjar regel 4 och det tredje utnyttjar reglerna 3 och 5.

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 7 & 9\\ 0 & 3 & 3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 3 & 1+3\\ 2 & 7 & 2+7\\ 0 & 3 & 0+3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 7 & 2\\ 0 & 3 & 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 3 & 3\\ 2 & 7 & 7\\ 0 & 3 & 3\end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$$

Det andra steget utnyttjar regel 4 och det tredje utnyttjar reglerna 3 och 5.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}2 & 1 & 5\\ 3 & -3 & 3\\ 6 & -5 & 7\end{vmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix}4 & 1 & 5\\ 6 & -3 & 3\\ 12 & -5 & 7\end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}4 & 1 & 4+1\\ 6 & -3 & 6-3\\ 12 & -5 & 12-5\end{vmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix}4 & 1 & 4\\ 6 & -3 & 6\\ 12 & -5 & 12\end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix}4 & 1 & 1\\ 6 & -3 & -3\\ 12 & -5 & -5\end{vmatrix} = 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

Det första steget utnyttjar regel 2, det tredje steget utnyttjar regel 4 och det fjärde utnyttjar reglerna 3 och 5.

2.12 Genom att subtrahera andra kolumnen ifrån den tredje och sedan den första kolumnen ifrån den andra får vi:

$$\det(A) = \begin{vmatrix}x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2\\ (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2\\ (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x^2 & 2x+1 & 2x+3\\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2x+5\\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2x+7\end{vmatrix}.$$

Subtrahera sedan åter andra kolumnen ifrån den tredje:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2x+3 \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2x+5 \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2x+7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2 \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Subtrahera nu andra raden ifrån den tredje och därefter den första raden ifrån den andra:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2 \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ 2x+1 & 2 & 0 \\ 2x+3 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Subtrahera nu till slut återigen den andra raden ifrån den tredje och vi får en diagonal matris som vi lätt räknar ut:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ 2x+1 & 2 & 0 \\ 2x+3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ 2x+1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8.$$

Alternativt kan man förstås använda Sarrus regel och förenkla de sjättegradspolynom man får.

2.14 (a) Eftersom determinanten är skild ifrån 0 så existerar inversen och om

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

så är

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

och alltså har även A^{-1} heltalselement och eftersom

$$\det(A)^{-1} = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{1} = 1$$

så ligger A^{-1} i M.

(b) Om

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} och B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

så är

$$AB = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}.$$

Det ger att

$$f_{AB}(x) = \frac{(ae+bg)x + (af+bh)}{(ce+dg)x + (cf+dh)}.$$

Å andra sidan så ges sammansättningen av

$$\begin{aligned} f_A \circ f_B(x) &= f_A\left(\frac{ex+f}{gx+h}\right) \\ &= \frac{a\left(\frac{ex+f}{gx+h}\right)+b}{c\left(\frac{ex+f}{gx+h}\right)+d} \\ &= \frac{a(ex+f)+b(gx+h)}{c(ex+f)+d(gx+h)} \\ &= \frac{(ae+bg)x+(af+bh)}{(ce+dg)x+(cf+dh)}. \end{aligned}$$

Vi ser därmed att de två funktionerna stämmer överens.

2.15 (a) En direkt kalkyl ger med A som i frågan att

$$A^2 - sp(A)A + det(A)I =$$

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a^2+bc-a^2-ad+ad-bc & b(a+d)-(a+d)b \\ c(a+d)-(a+d)c & d^2+bc-ad-d^2+ad-bc \end{pmatrix} = 0.$$

(b) Vi vet från första deluppgiften att om $det(A) = 0$ så gäller att $A^2 = sp(A)A$. Rekursivt får vi nu att

$$A^3 = A^2 \cdot A = sp(A)A \cdot A = sp(A)A^2 = sp(A)^2 A,$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = sp(A)^2 A \cdot A = sp(A)^2 A^2 = sp(A)^3 A$$

etc. Det känns som om $A^n = sp(A)^{n-1}A$ är en inte alltför vild gissning. Vi verifierar med ett enkelt induktionsbevis.

Basfall för $n = 1, 2, 3$ och 4 är klara.

Antag att påståendet sant för något k och visa att i så fall är det sant också för $k+1$.

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = sp(A)^{k-1}A \cdot A = sp(A)^{k-1}sp(A)A = sp(A)^k A$$

och därmed är saken klar.

Vi har alltså visat påståendet som efterfrågades med

$$k_n = sp(A)^{n-1}.$$

Lösningar till utvalda uppgifter i kapitel 3

3.6 En normaliserad riktningsvektor för linjen ges av $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\left(\begin{smallmatrix}1\\k\end{smallmatrix}\right)$. Om $\mathbf{v}_L$ är ortogonala projektionen av en vektor $\mathbf{v}$ på linjen så ges speglingen av $\mathbf{v}$ av $\mathbf{v}_S = 2\mathbf{v}_L - \mathbf{v}$. Dessutom gäller att $\mathbf{v}_L = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathbf{n}$ så vi får att om $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ så är

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_S &= 2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathbf{n} - \mathbf{v} = \frac{2}{1+k^2}\left[\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\frac{2}{1+k^2}(x+yk) - x \\ \frac{2k}{1+k^2}(x+yk) - y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{1+k^2} - 1 & \frac{2k}{1+k^2} \\ \frac{2k}{1+k^2} & \frac{2k^2}{1+k^2} - 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Matrisen för avbildningen är alltså

$$\frac{1}{1+k^2}\begin{pmatrix}1-k^2 & 2k \\ 2k & k^2-1\end{pmatrix}.$$

3.9 Om R är matrisen för rotationen och S är matrisen för speglingen så är den sökta matrisen $M = SR$. Vi har att rotationen ges av

$$R = \begin{pmatrix}\cos\pi/3 & -\sin\pi/3 \\ \sin\pi/3 & \cos\pi/3\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}.$$

Speglingen avbildar $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ på $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ och vice versa så

$$S = \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Det ger att den sökta matrisen är

$$M = SR = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

3.10 Spegling i linjen $y = x$ avbildar $\mathbf{e}_x$ på $\mathbf{e}_y$ och vice versa, så den har matrisen

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Projektion på x-axeln lämnar $\mathbf{e}_x$ totalt oberörd och krossar $\mathbf{e}_y$ totalt så den har matrisen

$$B = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Den sökta matrisen är alltså

$$C = BA = \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

3.11 Om P är matrisen för projektionen och R är matrisen för rotationen så är den sökta matrisen $A = RP$.

För projektionen är $\mathbf{e}_x$ och $\mathbf{e}_y$ oförändrade och $\mathbf{e}_z$ avbildas på nollvektorn så

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

För rotationen är $\mathbf{e}_x$ oförändrad, $\mathbf{e}_y$ avbildas på $\mathbf{e}_z$ och $\mathbf{e}_z$ avbildas på $-\mathbf{e}_y$ så

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Därmed är den sökta matrisen

$$A = RP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.14 (a) Vektorn $\mathbf{u} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ är en riktningsvektor för linjen som vi kallar L. En godtycklig vektor $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ projiceras på

$$\mathbf{v}_L = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\,\mathbf{u}\,|^2} \cdot \mathbf{u} = \frac{x + 3y}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} x + 3y \\ 3x + 9y \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Matrisen för avbildningen är alltså

$$A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

(b) Linjen $y = 3x + 1$ går inte igenom origo och därmed är projektionen på linjen inte en linjär avbildning. Däremot är den en affin avbildning som man lämpligen delar upp i tre delavbildningar. Först flyttas origo upp ett steg i y-led (för alla punkter betyder detta att y-koordinaten minskas med ett). Projektionen på linjen $y = 3x + 1$ svarar nu mot den linjära avbildningen från första deluppgiften och har alltså matrisen A. Till slut flyttas origo tillbaka till dess ursprungliga plats. Sätt

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och låt den linjära avbildningen från första deluppgiften vara $h(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Det som vi just beskrev blir då

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= g \circ h \circ g^{-1}(\mathbf{x}) = g\left(A\left(\mathbf{x} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\right) \\ &= A\left(\mathbf{x} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = A\mathbf{x} - \frac{1}{10}\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = A\mathbf{x} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Svaret är alltså samma A som i första deluppgiften och $\mathbf{b} = \frac{1}{10}\left(\begin{smallmatrix}-3\\1\end{smallmatrix}\right)$.

3.17 Den allmänna formeln för funktionen är

$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix},$$

så

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x_1+x_2\\-(y_1+y_2)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}x_1\\-y_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_2\\-y_2\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

och

$$f\left(c\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}cx\\cy\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}cx\\-(cy)\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix} = c \cdot f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$$

och alltså är f linjär.

3.18 Vi har t ex att

$$f\left(2 \cdot \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} \neq 2 \cdot \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = 2 \cdot f\left(\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right)$$

så f är inte linjär.

3.24 Vi har att $\mathbf{e}_y$ är oförändrad och att xz-planet roterar i positiv led. Det ger att

$$A = \begin{pmatrix}\cos\pi/4 & 0 & -\sin\pi/4\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\pi/4 & 0 & \cos\pi/4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

Spegling i yz-planet påverkar inte $\mathbf{e}_y$ och $\mathbf{e}_z$ medan $\mathbf{e}_x$ avbildas på $-\mathbf{e}_x$. Det ger att

$$B = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Den sökta matrisen är

$$C = BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

3.25 Om P är matrisen för projektionen och R är matrisen för rotationen så är den sökta matrisen $A = PR$.

För projektionen är $\mathbf{e}_x$ och $\mathbf{e}_y$ oförändrade och $\mathbf{e}_z$ avbildas på nollvektorn så

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

För rotationen är $\mathbf{e}_x$ oförändrad, $\mathbf{e}_y$ avbildas på $\mathbf{e}_z$ och $\mathbf{e}_z$ avbildas på $-\mathbf{e}_y$ så

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Därmed är den sökta matrisen

$$A = PR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.26 Vi skapar sammansättningen av avbildningen som avbildar $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ på standardbasen följt av avbildningen som avbildar standardbasen på $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$. Detta är uppenbarligen avbildningen som vi söker. Den första avbildningen ges av inversen till A där A avbildar standardbasen på $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ och om vi kallar den andra matrisen för B så får vi enligt bassatsen att

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ så } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

och

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Det ger att den sökta matrisen är

$$BA^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 11 \\ -7 & 13 \end{pmatrix}.$$

Lösningar till utvalda uppgifter i kapitel 4

4.6 (a) Vi beräknar skalärprodukten

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u}_1 \cdot \left(\mathbf{v}_2 - \sum_{i=1}^{2-1} \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_i}{|\ \mathbf{u}_i\ |^2} \mathbf{u}_i \right) = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{|\ \mathbf{u}_1\ |^2} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 \\ &= \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1 = 0,\end{aligned}$$

så alltså är de ortogonala.

(b) Vi gör ett induktionsbevis över $m = i + j$. Vi har ett basfall redan från första deluppgiften, nämligen $i + j = 3$ vilket är det minsta fallet då $i \neq j$. Antag att påståendet är sant för alla par (i, j) där $i + j < m$. Vi ska visa att då gäller det även för $i + j = m$. Vi kan av symmetriskäl anta att $i < j$. Vi beräknar skalärprodukten och får

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j &= \mathbf{u}_i \cdot \left(\mathbf{v}_j - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{u}_k}{|\ \mathbf{u}_k\ |^2} \mathbf{u}_k \right) \\ &= \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{u}_k}{|\ \mathbf{u}_k\ |^2} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_k \\ &= \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{u}_i = 0,\end{aligned}$$

där den näst sista likheten följer av induktionsantagandet eftersom $i + k < i + j$ så $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_k = 0$ om $k \neq i$. Alltså är $\mathbf{u}_i$ och $\mathbf{u}_j$ ortogonala.

Därmed följer det att det gäller för samtliga par (i, j).

4.9 Antag att A är symmetrisk, d v s att $A = A^t$. Låt $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ vara kolumnerna i A. Då gäller att

$$\mathbf{0} = A\mathbf{x} = A^t\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^t \\ \mathbf{a}_2^t \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^t \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^t\mathbf{x} \\ \mathbf{a}_2^t\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^t\mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{x} \end{pmatrix}.$$

Med andra ord så är $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} = 0$ för alla i så $\mathbf{x}$ är ortogonal mot alla kolumnvektorerna, vilket var precis vad vi skulle visa.

4.10 Vi subtraherar C ifrån båda leden och får då $AXB = D - C$. Eftersom både A och B är inverterbara så kan vi multiplicera båda leden med dessa matrisers respektive inverser ifrån vänster respektive höger vilket ger

$$\begin{aligned}
AXB = D - C \quad &\Leftrightarrow \quad A^{-1}(AXB)B^{-1} = A^{-1}(D-C)B^{-1} \\
&\Leftrightarrow \quad (A^{-1}A)X(BB^{-1}) = A^{-1}(D-C)B^{-1} \\
&\Leftrightarrow \quad X = A^{-1}(D-C)B^{-1}.
\end{aligned}$$

Alltså är $X = A^{-1}(D-C)B^{-1}$ en unik lösning till ekvationen.

Lösningar till utvalda uppgifter i kapitel 5

5.2 Subtraherar vi två gånger den första ekvationen ifrån den andra så får vi

$$-5y - 2z = -8.$$

Parametrisera genom att (t ex) sätta $y = 2t$ vilket ger $z = 4 - 5t$. Löser vi ut x ur den första ekvationen får vi slutligen

$$x = 5 - 2y - 2z = 5 - 4t - 8 + 10t = -3 + 6t.$$

Vi får alltså

$$\begin{cases} x = -3 + 6t \\ y = 2t \\ z = 4 - 5t. \end{cases}$$

(Observera att det finns oändligt många olika korrekta svar beroende på hur man väljer att parametrisera.)

5.5 Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -10 \end{pmatrix}.$$

Detta ger $z = -10/9$, $y = -4 - 4(-10/9) = 4/9$ och $x = 3 - 10/9 - 2 \cdot 4/9 = 1$.

5.6 Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 5 & 9 \\ 3 & 12 & 3 & 18 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Detta ger z fri, $y = (1 + z)/2$ och $x = 4 - 3z$.

5.7 Vi gör Gausselimination

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & -6 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5/2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4/3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 5/2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4/3 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7/2 & -13/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4/3 \end{pmatrix}$$

Från detta får vi en lösning med två fria parametrar och alltså geometriskt ett plan i $\mathbb{R}^5$. En parametrisering av planet ges av

$$\mathbf{x} = s \begin{pmatrix} -1 \\ -7/2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 13/3 \\ 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.8 Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & a & 4 \\ 2 & a & a & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & a+2 & -2 \\ 0 & a-4 & a+2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & \frac{a+2}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{a^2}{2}-2 & -a \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{a+2}{2} & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & -2a \end{pmatrix}.$$

Denna har ej unik lösning om och endast om $a^2 - 4 = 0$, d v s om och endast om $a = \pm 2$. I dessa fall blir $-2a = \mp 4$ så ekvationssystemet saknar då lösning.

5.9 Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & a & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a+\frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Från detta ser vi att vi har unik lösning om $a \neq -\frac{5}{2}$ och då $a = -\frac{5}{2}$ så har vi oändligt många lösningar. Svaret är alltså: inte för några värden alls.

5.14 De fem punkterna ger följande ekvationssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Om vi betecknar koefficientmatrisen med A och högerledsvektorn med $\mathbf{b}$ så ges minstakvadratlösningen av lösningen till $A^t A\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$. Multiplikation med A^t ger

$$A^t A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{pmatrix} \text{ och } A^t\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 28 \\ 59 \\ 165 \end{pmatrix}.$$

Vi löser detta ekvationssystem med Gausselimination

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 30 & 28 \\ 10 & 30 & 100 & 59 \\ 30 & 100 & 354 & 165 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & \frac{28}{5} \\ 0 & 10 & 40 & 3 \\ 0 & 40 & 174 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & \frac{28}{5} \\ 0 & 1 & 4 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 14 & -15 \end{pmatrix},$$

vilket ger $c = -15/14$, $b = 3/10 - 4(-15/14) = 321/70$ och $a = 28/5 - 6(-15/14) - 2(321/70) = 20/7$ så svaret blir

$$y = \frac{20}{7} + \frac{321}{70}x - \frac{15}{14}x^2.$$

5.15 (a) Man kan t ex ta vilka två kolumner som helst i A.

(b) Gausselimination ger

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & -1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -10 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$

varifrån vi ser att det finns vektorer $\mathbf{c}$ sådana att $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ saknar lösning. (I själva verket gäller det för alla vektorer utom det plan som spänns upp av två av kolumnerna i A.) Ett exempel är $\mathbf{c} = (0\ 0\ 1)^t$ då vi ser att denna inte kommer att påverkas av Gausseliminationen och sista ekvationen blir då $0 = 1$.

5.16 Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & a-b & -1 & 2 \\ 2 & 4 & b+1 & a-2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & a-b & -1 & 2 \\ 0 & 0 & b-5 & a-2 \end{pmatrix}$$

Från detta ser vi att vi har determinanten lika med noll om och endast om $a = b$ eller $b = 5$.

Om $b = 5$ så blir sista ekvationen $0 = a - 2$ så då måste $a = 2$ för att vi ska kunna ha någon lösning. Detta fallet ger en lösning eftersom det inte blir några problem med de två första ekvationerna.

Om $a = b$, så får vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & b-5 & b-2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3b-12. \end{pmatrix}$$

Denna har (oändligt många) lösningar om och endast om $3b - 12 = 0$, d v s $b = 4$.

Svaret är alltså: $(2, 5)$ och $(4, 4)$.

Lösningar till utvalda uppgifter i kapitel 6

6.4 (a) Genom att subtrahera andra kolumnen ifrån den tredje och sedan den första kolumnen ifrån den andra får vi:

$$\det(()\,A) = \begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 \\ (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 \\ (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2x+3 \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2x+5 \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2x+7 \end{vmatrix}.$$

Subtrahera sedan åter andra kolumnen ifrån den tredje:

$$\det(()\,A) = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2x+3 \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2x+5 \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2x+7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2 \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Subtrahera nu andra raden ifrån den tredje och därefter den första raden ifrån den andra:

$$\det(()\,A) = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2 \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ 2x+1 & 2 & 0 \\ 2x+3 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Subtrahera nu till slut återigen den andra raden ifrån den tredje och vi får en diagonal matris som vi lätt räknar ut:

$$\det(()\,A) = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ 2x+1 & 2 & 0 \\ 2x+3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ 2x+1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8.$$

Alternativt kan man förstås använda Sarrus regel och förenkla det sjättegradspolynom man får.

(b) Antag att $n \geq 4$. De fyra första kolumnerna i A ser ut så här:

$$\det(()\,A) = \begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 & \cdots \\ (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2 & \cdots \\ (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2 & (x+5)^2 & \cdots \\ (x+3)^2 & (x+4)^2 & (x+5)^2 & (x+6)^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Vi subtraherar 3:e kolonnen ifrån den 4:e, 2:a kolonnen ifrån den 3:e och slutligen den 1:a kolonnen ifrån den 2:a. Detta ändrar inte värdet på determinanten och eftersom $(x+n)^2 - (x+(n-1))^2 = 2x + 2n - 1$ så får vi då:

$$\det(()\,A) = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2x+3 & 2x+5 & \cdots \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2x+5 & 2x+7 & \cdots \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2x+7 & 2x+9 & \cdots \\ (x+3)^2 & 2x+7 & 2x+9 & 2x+11 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Vi subtraherar nu återigen 3:e kolonnen ifrån den 4:e och 2:a kolonnen ifrån den 3:e och får nu

$$\det(()\,A) = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 & 2 & \cdots \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2 & 2 & \cdots \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2 & 2 & \cdots \\ (x+3)^2 & 2x+7 & 2 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0,$$

eftersom två kolonner är identiska.

(c) Det räcker att ta ett exempel och beräkna determinanten och se att den inte blir noll. Sätt t ex $x = 0$ vilket ger

$$\det(()\,A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = -8.$$

I själva verket är den -8 oavsett vilket x man väljer!

Lösningar till utvalda uppgifter i kapitel 7

7.1 Vi beräknar determinanten av matrisen med de tre vektorerna som rader. Denna är skild från noll om och endast om vektorerna är linjärt oberoende. Vi får med hjälp av elementära radoperationer att

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-8-1) = -9 \neq 0,$$

så de är linjärt oberoende.

7.2 Vi beräknar determinanten av matrisen med de tre vektorerna som rader. Denna är skild från noll om och endast om vektorerna är linjärt oberoende. Vi får med hjälp av elementära radoperationer att

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2-2) = 0,$$

så de är linjärt beroende.

7.3 Vi beräknar determinanten för matrisen med vektorerna som kolumner och får $15 - 2a - a^2$. Vektorerna är linjärt beroende om och endast om determinanten är lika med 0. Vi löser alltså andragradsekvationen $15 - 2a - a^2 = 0$ vilket ger lösningarna $a_1 = -5$ och $a_2 = 3$.

7.6 Vi ska visa att vektorerna är parvis ortogonala och har längd 1 vilket är ekvivalent med att $M^tM = I$. Eftersom $2^2 + 3^2 + 6^2 = 4 + 9 + 36 = 49 = 7^2$ så har alla vektorerna längd 1. Dessutom är $2{\cdot}3+3{\cdot}(-6)+6{\cdot}2 = 6 - 18 + 12 = 0$ så $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är ortogonala. På samma sätt får man att skalärprodukten mellan $\mathbf{v}_3$ och de andra vektorerna är 0 och därmed att de är parvis ortogonala.

7.8 Vi låter F vara matrisen som har $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ som kolonner. Då gäller att $\mathbf{x}$ koordinater i standardbasen, $\mathbf{x}_E$, och dess koordinater i F-basen, $\mathbf{x}_F$, uppfyller

$$\mathbf{x}_F = F^{-1}\mathbf{x}_E.$$

Eftersom F är en ON-matris så är $F^{-1} = F^t$. Vi beräknar först

$$\mathbf{f}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Vi får då

$$\mathbf{x}_F = F^{-1}\mathbf{x}_E = F^t\mathbf{x}_E = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 4/3\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Kontrollera att det stämmer, d v s att $0 \cdot \mathbf{f}_1 + \frac{5}{3} \cdot \mathbf{f}_2 + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \mathbf{f}_3$ har koordinaterna $(1, 1, 1)$:

$$0 \cdot \mathbf{f}_1 + \frac{5}{3} \cdot \mathbf{f}_2 + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \mathbf{f}_3 = \frac{5}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7.9 (a) Betraktat i planet som spänns upp av $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ så är avbildningen rotation kring origo $\pi/4$ radianer moturs. Denna har matrisen

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den tredje basvektorn är oförändrad så totalt blir matrisen

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Om $\mathbf{x}$ är koordinaterna i standardbasen och $\mathbf{x}_V$ är koordinaterna i basen V så gäller sambandet att $\mathbf{x} = V\mathbf{x}_V$. Vi får alltså

$$\mathbf{x} = V\mathbf{x}_V = \begin{pmatrix} 1 & 15 & 3 \\ 3 & 7 & -3 \\ 3 & -12 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+30+9 \\ 3+14-9 \\ 3-24+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 8 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

7.10 (a) Basvektorerna $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ är oförändrade och $\mathbf{f}_3$ avbildas på nollvektorn så matrisen i basen F ges av

$$A_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Matrisen för L i standardbasen ges enligt känd sats av (observera att F är en ON-matris så $F^{-1} = F^t$)

$$\begin{aligned} A &= FA_FF^{-1} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 13 & -12 & 18 \\ -12 & 45 & 6 \\ 18 & 6 & 40 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7.11 Låt $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1\,1\,2)^t$ vara en normerad normalvektor till planet och bestäm $\mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ så att de har längd 1, är ortogonala och spänner upp planet. Man kan t ex ta $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\,-1\,0)^t$ och $\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2$ (eller direkt observera att) $\mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\,1\,-1)^t$ duger. I basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ har avbildningen matrisen

$$A_F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Det ger att den i standardbasen har matrisen

$$A = FA_FF^{-1} = FA_FF^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alternativt kan man direkt utnyttja att

$$A = I - 2\mathbf{f}_1\mathbf{f}_1^t.$$

7.12 (a) Enligt definitionen av skalärprodukt gäller för vinkeln α mellan $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ att

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2},$$

så $\alpha = \pi/3$ radianer eller 60 grader.

(b) Vektorn $\mathbf{v}_3$ ska alltså ligga i planet och vara ortogonal mot $\mathbf{v}_2$ så den ska uppfylla

$$\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \text{ och } \mathbf{v}_3 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$$

för några tal a och b. Om vi sätter in linjärkombinationen i den första ekvationen får vi

$$0 = (a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_2 = a\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + b\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = a + b.$$

Vi har alltså lösningen $a = -b$ så

$$\mathbf{v}_3 = a(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = a\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

För att få längd 1 sätter vi $a = 1/\sqrt{3}$.

(c) Det finns två möjligheter och den som ger ett högerorienterat system är

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Lösningar till utvalda uppgifter i kapitel 8

8.2 Alla vektorer som är normaler till planet, d v s vektorer på formen $(0\ 0\ z)^t$, avbildas på nollvektorn. Dessa kommer därför att vara egenvektorer med egenvärdet 0.

Alla vektorer som är parallella med planet, d v s vektorer på formen $(x\ y\ 0)^t$ kommer att vara oförändrade så de kommer alltså att vara egenvektorer med egenvärdet 1.

Vi har nu hittat tre linjärt oberoende egenvektorer (t ex de tre enhetsvektorerna) och därmed har vi hittat alla egenvektorer och egenvärden eftersom en 3×3-matris inte kan ha fler egenvektorer.

8.3 Alla vektorer som är normaler till planet, d v s vektorer på formen $(0\ 0\ z)^t$, har spegelbild den vektor som är lika lång och pekar i precis motsatt riktning. Dessa kommer därför att vara egenvektorer med egenvärdet -1.

Alla vektorer som är parallella med planet, d v s vektorer på formen $(x\ y\ 0)^t$ kommer att vara oförändrade så de kommer alltså att vara egenvektorer med egenvärdet 1.

Vi har nu hittat tre linjärt oberoende egenvektorer (t ex de tre enhetsvektorerna) och därmed har vi hittat alla egenvektorer och egenvärden eftersom en 3×3-matris inte kan ha fler egenvektorer.

8.4 (a) Den karakteristiska ekvationen är

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - x & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - x \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x$$

som har lösningarna $x = 0$ och $x = 1$ som därmed är de två egenvärdena. Egenvektorerna får man genom att dels lösa $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ som ger multiplar av $(1\ \ -1)^t$ och dels

$$\mathbf{0} = A\mathbf{x} - \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

som har lösning alla multipler av $(1\ 1)^t$. Vi har alltså att 0 är egenvärde med egenvektorer alla multiplar av $(1\ \ -1)^t$ och att 1 är egenvärde med egenvektorer alla multiplar av $(1\ 1)^t$.

(b) De två egenvektorerna är ortogonala. Multipler av $(1\ 1)^t$ är oförändrade och de ortogonala vektorerna avbildas på nollvektorn. Därmed är det ortogonal projektion på linjen genom origo med riktningsvektor $(1\ 1)^t$.

8.5 Den karakteristiska ekvationen ges av

$$0 = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 6 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2),$$

så egenvärdena är de två nollställena 1 och -2.

Sätter man in $\lambda = 1$ så får man ekvationen $-6x + 6y = 0$, vilket ger egenvektorerna $c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sätter man in $\lambda = -2$ så får man ekvationen $-3x + 6y = 0$, vilket ger egenvektorerna $c \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8.7 Vi beräknar en diagonalisering av A för att lätt kunna beräkna den höga potensen.

Vi beräknar egenvärdena till A genom att lösa

$$0 = \det\left(()\, A - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} 1/2-\lambda & -3/2 \\ -3/2 & 1/2-\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\left((1-2\lambda)^2 - 9\right),$$

som har lösningen $2\lambda = 1 \pm 3$, d v s $\lambda = -1$ respektive $\lambda = 2$.

Motsvarande egenvektorer får vi genom att lösa ekvationssystemen

$$\begin{pmatrix} 1/2-(-1) & -3/2 \\ -3/2 & 1/2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 \\ -3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

respektive

$$\begin{pmatrix} 1/2-2 & -3/2 \\ -3/2 & 1/2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & -3/2 \\ -3/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Dessa har lösningarna $\mathbf{v}_1 = t\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ respektive $\mathbf{v}_2 = t\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. Normerar vi så får vi ON-matrisen

$$P = (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliseringen av A blir då $A = PDP^{-1}$ där D är diagonal med -1 och 2 på diagonalen och $P^{-1} = P^t$. Till slut blir då

$$\begin{aligned} A^{1000} &= PD^{1000}P^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^{1000} & 0 \\ 0 & 2^{1000} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+2^{1000} & 1-2^{1000} \\ 1-2^{1000} & 1+2^{1000} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

8.8 Vi vet att en matris som uppfyller kraven är $A = PDP^{-1}$, där D är en diagonalmatris med egenvärdena på diagonalen och P en matris med egenvektorerna som kolonner. Observera att de tre egenvektorerna är ortogonala, så vi kan välja P som en ON-matris genom att normera egenvektorerna. Därmed kommer vi att ha $P^{-1} = P^t$.

Vi sätter alltså t ex

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ och } P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

vilket ger

$$A = PDP^t = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 34 & 12 & 0 \\ 12 & 41 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}.$$

8.9 Observera att A är symmetrisk så det är möjligt att hitta sådana matriser. Om A har egenvärdena λ_1, λ_2 och λ_3 med motsvarande normaliserade ortogonala egenvektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ så är $A = PDP^t$ där $P = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3)$ och D är diagonal med egenvärdena på diagonalen. Vi bestämmer egenvärden och egenvektorer.

Den karakteristiska ekvationen ges av

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)((3-\lambda)(4-\lambda)-4) + 2(0-2(3-\lambda)) \\ &= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 39\lambda + 28 = -(\lambda-1)(\lambda^2 - 11\lambda + 28) \\ &= -(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-7). \end{aligned}$$

För att faktorisera polynomet använde vi tipset att $\lambda = 1$ är ett egenvärde och löste sedan den återstående andragradsekvationen. Återstår nu att bestämma egenvektorerna.

$\lambda = 1$: Likheten $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$ ger

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

vilket ger $\mathbf{v}_1 = (1/3) \cdot (-1 \ 2 \ 2)^t$.

$\lambda = 4$: Likheten $A\mathbf{v}_2 = 4\mathbf{v}_2$ ger

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vilket ger $\mathbf{v}_2 = (1/3) \cdot (2\ 2\ -1)^t$.

$\lambda = 7$: Likheten $A\mathbf{v}_2 = 7\mathbf{v}_2$ ger

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vilket ger $\mathbf{v}_3 = (1/3) \cdot (-2\ 1\ -2)^t$.

Vi får alltså

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ och } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

8.10 Från satserna om diagonalisering så vet vi att en matris A som uppfyller kraven ges av

$$A = MDM^{-1},$$

där D är en diagonalmatris med egenvärdena på diagonalen. Observera att M är en ON-matris så $M^{-1} = M^t$. Den är dessutom symmetrisk så i själva verket är $M^{-1} = M$. Vi får alltså

$$A = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 130 & 6 & -30 \\ 6 & 93 & -24 \\ -30 & -24 & 71 \end{pmatrix}$$

8.11 Alla vektorer i planet kommer att vara oförändrade så dessa är egenvektorer med egenvärdet 1. De vektorer som är vinkelräta mot planet avbildas på nollvektorn så dessa har egenvärdet 0. Summerar vi så är alltså $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ tre linjärt oberoende egenvektorer med egenvärdena 1, 1 och 0. Några fler finns det inte, eftersom vi bara kan ha högst tre linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$.

8.12 (a) Den är reflexiv eftersom om vi väljer P att vara identitetsmatrisen så är $A = PAP^{-1}$ och därmed är A konjugerad med sig själv. Den är symmetrisk eftersom om $A = PBP^{-1}$ så är ju $B = P^{-1}AP$ så om A är konjugerad med B så är B konjugerad med A. Den är transitiv eftersom om $A = P_1BP_1^{-1}$ och $B = P_2CP_2^{-1}$, så är

$$A = P_1BP_1^{-1} = P_1P_2CP_2^{-1}P_1^{-1} = (P_1P_2)C(P_1P_2)^{-1}.$$

Med andra ord om A är konjugerad med B och B är konjugerad med C så är A konjugerad med C vilket precis är villkoret för transitiviteten.

Eftersom den är reflexiv, symmetrisk och transitiv så är den per definition en ekvivalensrelation.

(b) Antag att A och B är konjugerade och att λ är ett egenvärde till A. Det räcker att visa att då är λ ett egenvärde också till B, ty då är alla egenvärden till A egenvärden till B och omvändningen följer av symmetrin.

Vi antar alltså att $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ för någon vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ och $A = PBP^{-1}$ för en inverterbar matris P. Då får vi att

$$B(P^{-1}\mathbf{v}) = (P^{-1}AP)P^{-1}\mathbf{v} = P^{-1}A\mathbf{v} = P^{-1}\lambda\mathbf{v} = \lambda P^{-1}\mathbf{v},$$

så λ är alltså ett egenvärde till B med egenvektorn $P^{-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

8.13 (a) Alla vektorer i planet som vi projicerar på, d v s alla linjärkombinationer av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$, är oförändrade och är alltså egenvektorer med egenvärdet 1. De vektorer som är ortogonala mot planet, d v s multiplar av $\mathbf{v}_3$, avbildas på nollvektorn och är alltså egenvektorer med egenvärdet 0. Detta är alla egenvärden och egenvektorer då vi har tre linjärt oberoende egenvektorer.

(b) Låt F vara matrisen som har basvektorerna som kolumner. I basen F är matrisen för avbildningen

$$A_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Denna är relaterad till matrisen A i standardbasen genom $A = FA_FF^{-1}$ och eftersom F är en ON-matris så är $F^{-1} = F^t$ och vi får att

$$A = FA_FF^t = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

8.14 Förutsättningarna ger att

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\beta \\ 1-\alpha & \beta \end{pmatrix}$$

med $0 \le \alpha, \beta \le 1$. Den karakteristiska ekvationen blir då

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 1-\beta \\ 1-\alpha & \beta-\lambda \end{vmatrix} = (\alpha-\lambda)(\beta-\lambda) - (1-\alpha)(1-\beta) \\ &= \lambda^2 - (\alpha+\beta)\lambda + (\alpha+\beta-1) = (\lambda-1)(\lambda-(\alpha+\beta-1)), \end{aligned}$$

så att A har alltså egenvärdena $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = \alpha+\beta-1$. Dessutom gäller att

$$\lambda_2 = \alpha+\beta-1 \ge 0+0-1 \ge -1 \text{ och } \lambda_2 = \alpha+\beta-1 \le 1+1-1 \le 1$$

och därmed är saken klar.

8.15 Ett alternativ är (förstås) nollmatrisen som har alla vektorer som egenvektorer med egenvärdet 0. Allmänt så ska den karakteristiska ekvationen ha 0 som dubbelrot. Om

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

så är karakteristiska ekvationen

$$0 = \det\left(() A - \lambda I\right) = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc).$$

Vi ska alltså ha $a+d=0$ och $ad-bc=0$. Den första ger $a=-d$ som insatt i den andra ger $d^2=-bc$. En möjlighet är $d=b=1$ och $a=c=-1$, d v s

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.16 (a) Vi vet att egenvärdena är nollställen till det karakteristiska polynomet $\det\left(() A - \lambda I\right) = 0$. För en 3×3-matris är detta ett tredjegradspolynom. Om man räknar ut detta så får man

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2 + b\lambda + c,$$

där b och c är kombinationer av koefficienterna som vi inte behöver bry oss om. Allmänt för ett tredjegradspolynom $p(x)$ gäller att om det har rötterna x_1, x_2 och x_3 så är

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ &= x^3 - (x_1+x_2+x_3)x^2 + (x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x - x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Alltså är summan av rötterna lika med minus koefficienten framför x^2. För det karakteristiska polynomet betyder det att summan av egenvärdena (som ju är summan av rötterna) är lika med $a_{11} + a_{22} + a_{33}$. (Notera att det är minustecken framför λ^3.) Detta var precis det vi ville visa.

(b) Samma resonemang fungerar för en $n \times n$-matris och ett polynom av grad n. I detta fallet är koefficienten framför x^{n-1} lika med minus summan av rötterna och när man räknar ut det karakteristiska polynomet så får man grad $n-1$ på λ endast då man multiplicerar ihop alla elementen på diagonalen. Denna produkt ger

$$\prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - \lambda) = (-1)^n(\lambda^n - \lambda^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \dots.$$

Vi ser alltså återigen att summan av egenvärdena, d v s summan av rötterna, är lika med summan av elementen på diagonalen.

8.17 (a) Vi vet att en 3×3-matris med tre linjärt oberoende egenvektorer är diagonaliserbar och vi använder diagonaliseringen baklänges här för att hitta A med de givna egenvärdena och egenvektorerna. Sätt D som diagonalmatrisen med egenvärdena på diagonalen och låt P vara matrisen med egenvektorerna som kolumner. Då är $A = PDP^{-1}$ en matris med de efterfrågade egenskaperna. Eftersom egenvektorerna är ortogonala kan vi normalisera dem så att P blir en ON-matris och därmed $P^{-1} = P^t$. Alltså med

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ och } P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

så är ett exempel på en eftersökt matris

$$A = PDP^t = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 11 & 8 & -2 \\ 8 & 5 & 10 \\ -2 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Vi kan se att de tre vektorerna är linjärt beroende genom att t ex beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -8 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Det finns en sats som säger att egenvektorer till olika egenvärden är linjärt oberoende. Vi har alltså en motsägelse så det kan omöjligt vara så att dessa tre vektorer kan vara egenvektorer till de tre olika egenvärdena 2, 1 respektive -1. (Detta är också den enda sak som kan förstöra för oss för om de är linjärt oberoende så fungerar strategin vi använde i lösningen av första deluppgiften.)

8.18 Eftersom A är en 2×2-matris med två olika egenvärden så är den diagonaliserbar, $A = PDP^{-1}$, där

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

är en diagonalmatris. Vi får då att

$$A^n = PD^nP^{-1} \text{ där } D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

Eftersom $|\lambda_1| < 1$ och $|\lambda_2| < 1$ så är

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_1^n = \lim_{n \to \infty} \lambda_2^n = 0.$$

Därmed kommer D^n att närma sig nollmatrisen när n växer mot oändligheten och eftersom P är en konstant matris så kommer också A^n att närma sig nollmatrisen när n växer mot oändligheten. Det betyder att alla elementen i A^n närmar sig 0 och därmed att

$$\lim_{n \to \infty} \|A^n\| = 0.$$

Lösningar till utvalda uppgifter i kapitel 9

9.3 (a) Grannmatris:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Övergångsmatris:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Den stationära fördelningen kan man få genom att ta graden för varje nod dividerat med två gånger det totala antalet kanter. Graden för noderna är i ordning $2, 3, 2, 1$ och det finns 4 kanter så den stationära fördelningen blir

$$\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

9.4 (a) Låt x_n vara antalet bilar på Landvetter vecka n och y_n antalet bilar på Centralen vecka n och sätt $\mathbf{v}_n = \left(\begin{smallmatrix} x_n \\ y_n \end{smallmatrix}\right)$. Informationen kan sammanfattas i det rekursiva sambandet

$$\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} 0.88 & 0.1 \\ 0.12 & 0.9 \end{pmatrix} \mathbf{v}_n.$$

Vi bestämmer egenvärden för A och får via den karakteristiska ekvationen

$$0 = \begin{vmatrix} 0.88 - \lambda & 0.1 \\ 0.12 & 0.9 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.78\lambda - 0.78 = (\lambda - 1)(\lambda - 0.78).$$

Vi har alltså egenvärdena $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 0.78$ och om $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ är motsvarande egenvektorer så får vi att

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_n &= A^n\mathbf{v}_0 = A^n(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2) = \alpha_1\lambda_1^n\mathbf{e}_1 + \alpha_2\lambda_2^n\mathbf{e}_2 \\ &= \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2(0.78)^n\mathbf{e}_2 \longrightarrow \alpha_1\mathbf{e}_1 \text{ då } n \to \infty. \end{aligned}$$

Det gäller alltså att räkna ut $\mathbf{e}_1$ som ger proportionerna.

Det homogena systemet $A\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$ har matrisen

$$A - I = \begin{pmatrix} -0.12 & 0.1 \\ 0.12 & -0.1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -0.12 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vilket har lösningarna $t\binom{5}{6}$. Andelen på Landvetterkontoret blir alltså $5/(5+6) = 5/11$.

(b) Antag att vi har fördelningen med 70% av bilarna på Landvetter så att $\mathbf{v}_n = \binom{0.7}{0.3}$. Då får vi

$$\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} 0.88 & 0.1 \\ 0.12 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.646 \\ 0.354 \end{pmatrix}$$

så för att ha 70% också i början av veckan därpå måste $0.7 - 0.646 = 0.054$, d v s 5.4% av totala bilparken köras från Centralen ut till Landvetter.

9.5 Låt C_n vara antalet bilar på Centralen i början av vecka n, L_n antalet på Landvetter och U_n antalet som är uthyrda. Sätt $\mathbf{x}_n = (C_n \ L_n \ U_n)^t$. Informationen i uppgiften ger då att

$$\mathbf{x}_{n+1} = P\mathbf{x}_n = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x}_n.$$

En stationär fördelning $\mathbf{v}$ måste vara en egenvektor till P med egenvärdet 1 så det är alltså en lösning till $P\mathbf{v} = \mathbf{v}$, d v s

$$\mathbf{0} = (P - I)\mathbf{v} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{v}.$$

Vi löser detta homogena ekvationssystem med Gausselimination och får

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -11 & 9 \\ 0 & 11 & -9 \end{pmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -14/11 \\ 0 & 1 & -9/11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Detta ger lösningarna

$$\mathbf{v} = t \begin{pmatrix} 14/11 \\ 9/11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

som efter normering med $t = 1/(14/11 + 9/11 + 1) = 11/34$ ger fördelningen

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 7/17 \\ 9/34 \\ 11/34 \end{pmatrix},$$

så exempelvis är $7/17$ av samtliga bilar på kontoret på Centralen.

9.6 (a) Vår startfördelning är $\mathbf{x}_0^t = (1/3\ 1/3\ 1/3)$ och vi får fördelningen $\mathbf{x}_1^t$ efter ett steg genom

$$\mathbf{x}_1^t = \mathbf{x}_0^t M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

så sannolikheten att vara i nod a är $1/4$.

(b) Den stationära fördelningen $\mathbf{x}$ uppfyller $\mathbf{x}^t = \mathbf{x}^t M$ vilket är ekvivalent med $M^t\mathbf{x} = \mathbf{x}$ som i sin tur är ekvivalent med $(M^t - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Gausselimination ger

$$\begin{aligned} M^t - I \quad &= \quad \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & 4 & 2 \\ 3 & -8 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -8 & 2 \\ -9 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -8 & 2 \\ 0 & -20 & 8 \\ 0 & 10 & -4 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -8 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen är $z = t$, $y = 2z/5 = 2t/5$ och $x = y = 2t/5$. Summan av elementen ska vara 1 så vi ska välja $t = 5/9$ och den sökta stationära fördelningen är $\mathbf{x}^t = (2/9\ 2/9\ 5/9)$.